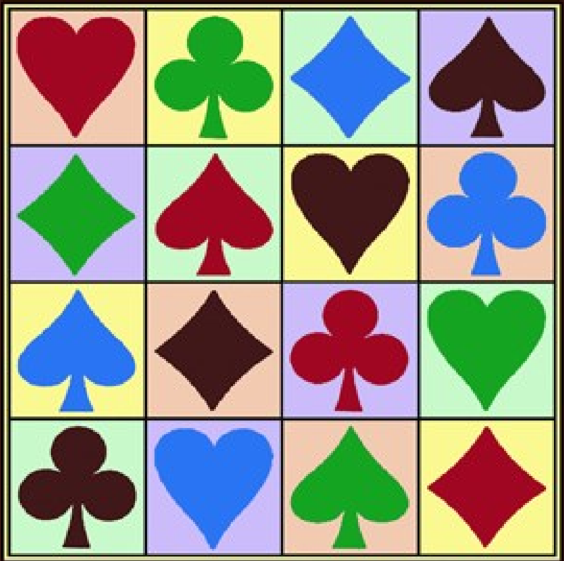
СЛАВА БРОДСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ФАКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

математические основания



SLAVA BRODSKY

AN INTRODUCTION TO THE FACTORIAL DESIGN OF EXPERIMENTS

Слава Бродский (В.З.Бродский) родился в Тбилиси, с ранних лет жил в Москве. Выпускник математического отделения мехмата Московского университета. Автор и соавтор ряда книг в области прикладной математической статистики, среди которых "Многофакторные регулярные планы" (Изд-во Московского университета), "Введение в факторное планирование эксперимента" (М., Наука), "Математическая теория планирования эксперимента" (М., Наука, Главная редакция физико-математической литературы). В 1991 году иммигрировал в США. С тех пор работал в финансовой индустрии Манхэттена. Живет с женой в Миллбурне (штат Нью Джерси). Его вебсайт: www.slavabrodsky.com.

Книга В.З.Бродского приятно выделяется высокой математической культурой и наличием в ней конструктивно новых результатов, полученных непосредственно автором.

В.В.Федоров

ISBN 978-1-936581-04-7

СЛАВА БРОДСКИЙ

В В Е Д Е Н И Е
В Ф А К Т О Р Н О Е
П Л А Н И Р О В А Н И Е
Э К С П Е Р И М Е Н Т А

(МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ)

SLAVA BRODSKY

A N I N T R O D U C T I O N
T O T H E F A C T O R I A L
D E S I G N O F E X P E R I M E N T S

Manhattan Academia

Слава Бродский (В. З. Бродский)
Введение в факторное планирование эксперимента
(математические основания)
Второе издание

Slava Brodsky (V. Z. Brodsky)
An Introduction to the Factorial Design of Experiments
(Mathematical Foundations)

Manhattan Academia, 2013
www.manhattanacademia.com
mail@manhattanacademia.com
ISBN: 978-1-936581-04-7

Монография относится к области планирования оптимальных экспериментов. В ней представлены новые идеи автора, составляющие существенную часть математического основания факторного планирования. Вводится новая концепция факторных моделей и рассматриваются вопросы построения эффективных планов эксперимента для них. Книга содержит многочисленные примеры и каталог планов.

Монография предназначена для широкого круга читателей. Она будет полезна тем, кто занимается теоретическими основами планирования эксперимента, и тем, кто связан с экспериментом в различных областях промышленности и естественных наук. Также книга может служить основой курса по планированию эксперимента для аспирантов и студентов старших курсов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к первому изданию

Внимание математиков давно приковано к проблеме эффективной обработки результатов экспериментов. Эта проблема изучается в разделе математической статистики, практическую полезность которой ощущает многочисленный отряд экспериментаторов-исследователей, работающих в различных областях науки и техники. Значительно моложе другая область математической статистики, называемая планированием эксперимента. Практика показала, что разумное распределение экспериментальных затрат, эффективное планирование эксперимента не менее важно, чем эффективная обработка результатов эксперимента. Умелое применение этих двух областей математической статистики позволяет наиболее полно использовать имеющиеся ресурсы и значительно поднять эффективность экспериментальных исследований.

Настоящая книга посвящена теории факторного планирования, с задач которой начала свое развитие теория планирования эксперимента. Факторные эксперименты были впервые рассмотрены Фишером (R. A. Fisher) почти полвека назад. Задачи факторного планирования возникли при сельскохозяйственных исследованиях. Однако давно уже факторные планы используются в различных областях. Многочисленны их успешные применения в химических, биологических и медицинских исследованиях, в производстве различных изделий и материалов, в металлургии.

Цель настоящей книги – рассмотреть с единых позиций все основные вопросы теории факторного планирования. Для достижения этой цели пришлось преодолеть определенные трудности. В первую очередь это относится к самому основанию теории.

Сотни журнальных публикаций содержат слова «факторные планы» в своих заголовках. Однако не все авторы пользуются одинаковыми определениями этого понятия. В книге понятия «факторные планы» и «факторные модели» введены, с одной стороны, так, чтобы это не вызвало большого удивления авторов статей по факторным планам, с другой – чтобы эти определения были в некотором смысле продуктивными.

При написании книги автор стремился к тому, чтобы она была интересна с теоретической точки зрения и полезна для приложений.

При знакомстве с книгой, кроме начальных сведений по математической статистике, формально не требуется знаний сверх обычной вузовской программы математики (необходимые дополнительные сведения приводятся в первых двух главах), но желательно знакомство с элементами математической теории обработки и планирования эксперимента. Для этого можно рекомендовать книги Дрейпера и Смита (Прикладной регрессионный анализ. М., «Статистика», 1973) и Налимова и Черновой (Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965). Чтобы облегчить понимание книги (особенно читателям, не имеющим профессиональной математической подготовки), изложение всех глав сопровождается примерами.

Автор считает приятным долгом поблагодарить тех, кто оказал ему помощь на различных этапах подготовки книги. В. В. Налимов пробудил интерес автора к данной теме и всегда относился к этой работе с живым и критическим вниманием. Автор постоянно ощущал понимание и поддержку В. Г. Горского, контакты с которым были очень полезны. Многие результаты (в частности, составляющие основу главы 3) были получены после стимулирующих обсуждений с Т. И. Голиковой. Автор признателен также Е. П. Никитиной и В. С. Кузнецову, которые просмотрели отдельные части рукописи и сделали ряд ценных замечаний.

Предисловие ко второму изданию

Первое издание моей книги вышло в Советской России в 1976 году. И с этим событием было связано много трагикомических обстоятельств.

Книга была представлена в 1974 году в издательство «Наука» Научным советом по кибернетике при Президиуме Академии наук СССР. Мало кто в России (даже в научных кругах) знал, что такое кибернетика. Но, тем не менее, одно время вы могли поплатиться жизнью за принадлежность к этому направлению. Ведь в России считалось, что кибернетика помогает разработке агрессивных планов тех, кто готовит третью мировую войну. Позднее гонители кибернетики были с одобрения советских властей признаны мракобесами. И тогда уже вы могли иметь серьезные неприятности за любое сомнение в полезности труда тех, кто говорил, что занимается кибернетикой.

И вот в то время, когда слово кибернетика стало супермодным в России, оказалось, что планирование эксперимента каким-то боком относится к кибернетике. Это открывало многие двери перед теми, кто этой наукой занимался. В этом смысле повезло и мне, когда издательство «Наука» приняло решение мою книгу опубликовать.

Однако для того, чтобы книга была в действительности принята издательством, мне надо было преодолеть некоторые трудности, мало имеющие отношение к науке. Трудности были связаны с физической сдачей рукописи в издательство.

Первая из них касалась оформления книги. В издательстве строгие приемщики рукописей, как и все другие советские чиновники, любили гонять людей взад-вперед за малейший отход от правил. При этом сами правила были необоснованно сложны и держались в секрете (как, кстати, и любые другие правила, касающиеся чего угодно в советской России). Я потратил пару месяцев в борьбе за право ознакомиться с этими правилами. И только тогда, когда я в своей борьбе зашел слишком далеко и потребовал свидания с директором издательства, правила, наконец, были мне предоставлены.

Как потом выяснилось, не только авторы, но и сами приемщики рукописей с правилами знакомы не были. Каждый чиновник устанавливал свои правила и при этом сам их время от времени менял. Я с огорчением узнал от кого-то из авторов, что пока еще никому не удавалось сдать свою книгу с первого предъявления. Но я был настроен оптимистически: у меня на руках были правила оформления рукописей издательства «Наука», и я привел свою рукопись в полное соответствие с этими правилами.

Вторая (но, как оказалось, самая главная) трудность заключалась в том, что мне надо было пройти советскую цензуру. Мне надо было получить подтверждение цензоров, что моя книга не содержала сведений, не подлежащих опубликованию в открытой печати. Я подготовил все нужные бумаги и стал ждать решения экспертной комиссии. До конца года, когда был крайний срок сдачи книги в издательство «Наука», оставалось шесть месяцев. И я полагал, что получу необходимый мне акт экспертизы в течение нескольких недель. Я думал так потому, что мой математический текст конечно же не содержал никаких государственных секретов и искать в математических теоремах какую-то идеологическую крамолу, как мне казалось, было бессмысленным занятием.

Как оказалось, я полагал все это совершенно напрасно. Этот процесс у советских цензоров занял восемь месяцев. Я ждал до последнего дня. И в последний день сдачи книги – 30 декабря 1974 года – я принес ее в издательство без акта экспертизы. Меня, конечно же, должны были тут же оттуда выгнать. Но произошло чудо. Моя приемщица была, видно, сильно шокирована тем, как происходило рассмотрение моей рукописи. Она находила очередную «серьезную» ошибку в оформлении, а я тут же открывал правила издательства и доказывал ей, что все сделано в полном согласии с этими правилами. Все это продолжалось несколько часов. Раздосадованная, она куда-то иногда убегала на несколько минут, чтобы, наверное, с кем-то проконсультироваться. Но, в конце концов, она сдалась. А наличие акта экспертизы просто забыла проверить. Заметили в издательстве его отсутствие только, когда стали отдавать мою книгу на редактирование – в марте 1975 года. К этому времени бдительные цензоры убедились в том, что в моих теоремах ни секретов, ни антисоветской пропаганды нет, и выдали мне на руки утвержденный акт экспертизы.

Далее все пошло достаточно гладко. Моим редактором была назначена симпатичная молодая женщина. Мне она показалась довольно грамотной. Правда, до этого она редактировала художественные произведения. И она честно меня об этом предупредила в самом начале нашего знакомства. Все шло своим чередом. Ей только не нравилось частое употребление слова «рассмотрим» в моем тексте: рассмотрим план, рассмотрим матрицу, рассмотрим модель. Поэтому, как я ни противился, она пыталась заменить это слово различными бытовыми синонимами. Я со скрипом соглашался. А потом попросил ее – на память о нашей совместной работе и для будущих ссылок – отвести одну страницу моей книги в справочном порядке для всех таких синонимов. И вот теперь для тех, кто пишет математические книги на русском языке, могу рекомендовать ознакомиться со страницей 52 первого издания моей книги. Там можно найти все заменители слова «рассмотрим», предложенные моим «художественным» редактором: используем, возьмем, применим, обратимся.

Когда книга уже прошла всю редакционную подготовку, встал вопрос об обложке. Я подготовил для нее рисунок, содержащий изображение игральных карт, который вы видите сейчас на обложке настоящей книги. Я ожидал, что столкнусь с серьезными проблемами, предлагая этот рисунок. Дело в том, что в Советской России играть в карты по каким-то непонятным причинам было запрещено. А незадолго до подачи моей книги в издательство, вышло постановление одного из советских органов о запрещении карточной игры бридж (вместе с запрещением атлетической гимнастики, карате, женского футбола и занятий по системе «Хатха-Йога»). Наверное, поэтому, когда мой редактор посмотрела рисунок, она сказала: «Мне это нравится, но главный редактор такой рисунок не пропустит». Я предложил тогда пойти к главному редактору и поговорить с ним.

Главный редактор рисунок мой похвалил, но сказал, что он не подойдет для научной книги, сделав особый нажим на слово «научной». Я спросил его, почему же рисунок не подойдет для научной книги. И он сказал, что лично ему рисунок нравится и он бы его оставил на обложке, но директор издательства такое дело, конечно же, не пропустит. И главный редактор заверил меня, что он в этом абсолютно уверен. Я тут же предложил пойти к директору издательства. И через несколько дней мы с главным редактором уже сидели у директора в его кабинете.

Мы мирно о чем-то поговорили. Потом директор посмотрел мой рисунок, сказал, что он ему очень нравится, взял ручку и спросил, что ему нужно подписать, чтобы этот рисунок утвердить. И тут мой главный редактор спросил директора, а что же мы, мол, будем отвечать пенсионерам, когда они будут присылать в издательство гневные письма по поводу карт на обложке научной книги. Директор положил ручку на стол и сказал: «Эх! Где-нибудь там…» – и он показал большим пальцем куда-то себе за спину – «…там дали бы такие сочные цвета, блестящий переплет и книга…» – и он рассек воздух ладонью – «… и книга пошла бы! А мы, вы правы… – это он – главному редактору – вы правы, мы, конечно, не можем. Не можем печатать карты на обложке научной книги. Придумайте что-нибудь другое…» – это он говорил уже мне. И потом нам с главным редактором: «Всего вам хорошего». Директор вышел из-за стола и стал пожимать нам руки. Где-то уже в дверях я успел сказать, что заменю карты их стилизованным изображением, и директор сказал что-то одобрительное по этому поводу.

Тираж книги был определен издательством в 16 тысяч экземпляров и был, на мой взгляд, явно завышен. Я поначалу подумал, что разойдется едва ли более нескольких десятков экземпляров. Однако книга была раскуплена практически сразу. И в этом, если принять во внимание ситуацию того времени в России, ничего удивительного не было. Книжный голод заставлял людей сметать любые книги (кроме партийных изданий) с прилавков магазинов. Для городского жителя считалось неприличным не иметь большого количества книжных полок. А заполняя их, люди покупали все, что было тогда в книжных магазинах. Эта и все другие несуразности были следствием той общей атмосферы абсурдности, которая была присуща построенному в советской России социалистическому обществу. Кстати, я думаю, что авторское вознаграждение за книгу в соответствии с социалистическими принципами было распределено поровну. Однако, между кем оно было распределено поровну, я не знаю. И автор в числе тех, кто получил вознаграждение, не оказался.

Когда в том месте, где я тогда работал, узнали об опубликовании моей книги, мне посоветовали подать заявку по теме книги в Государственный комитет по науке и технике при Совете министров СССР. Я подал такую заявку, и она была принята комитетом практически мгновенно. Хотя никто в этом комитете, конечно, не знал, о чем идет речь. Через несколько месяцев специальным постановлением правительства была образована программа комитета по моей тематике. Таким образом, латинские квадраты и все такое прочее попали в ряд ведущих направлений развития науки и техники в стране. В этом факте ничего такого необычного не было. Так планировались работы в стране с командной экономикой.

Мне как руководителю программы были выделены большие деньги на проведение работ. Хотя и те, кто выделял деньги, и я, который их как бы получал, знали, что потратить их будет нельзя. Деньги выделялись мне только на бумаге – в постановлении Государственного комитета. А откуда их взять – этого не знал никто. А если бы даже каким-то чудом эти деньги откуда-то и появились, то потратить их было бы нельзя. Нельзя было бы принять на работу каких-то новых людей, и не существовало нигде никаких товаров, которые я мог бы на эти деньги купить.

Работа по теме заняла пять лет. Результат интересовал чиновников комитета и руководителей нашего института только с той точки зрения, выполнена работа или нет. Если работа не была бы выполнена в срок, руководители нашего института, скорее всего, лишились бы своих мест (за невыполнение постановления правительства). Но работа была выполнена в срок. Она закончилась отчетом, который, как я думаю, никто никогда не прочитал.

Работа эта чуть было не была продолжена более чем через десять лет. Я приехал в Америку в конце 1991 года и узнал о том, что Национальный институт стандартов и технологии предложил программу научных исследований (ASA/NSF/NIST Senior Research Fellow Program) на 1992 – 1993 гг. (в том числе по планированию эксперимента). Я подал свои предложения. Потом стал проходить различные интервью и высылать дополнительные материалы. В какой-то момент меня известили о том, что мои предложения предварительно одобрены и что я должен пройти заключительное интервью по телефону с представителем института.

Интервьюер задавал мне какие-то вопросы, я отвечал. У меня, естественно, не было проблем по существу вопросов. Точнее сказать, у меня не должно было быть никаких проблем с вопросами. Но я был в стране только несколько месяцев и плохо понимал американский английский (тем более, по телефону). В какой-то момент мой интервьюер спросил, знаком ли я с работами Аддельмана. Конечно, я был хорошо знаком со всеми его работами. И у меня уже даже было обобщение одного его результата. Но в устах моего интервьюера фамилия Аддельмана прозвучала для меня не совсем так, как я тогда предполагал она должна была прозвучать. А ударение на первом слоге совсем сбило меня с толку. И я ответил: "*I don't know him*!" Это хоть и прозвучало вполне по-библейски, но, по всей видимости, оказалось последней каплей нашего и без того напряженного (по моей вине, разумеется) разговора. В результате Национальный институт стандартов отверг мою кандидатуру, и в последующие более чем двадцать лет я прилагал свое математическое образование и опыт в разработке программного обеспечения в совсем другой области – финансовой индустрии.

Была ли какая-то польза от первого издания моей книги в России? Ответить на этот вопрос чрезвычайно трудно. Не знаю, как насчет всех этих теорем – того, что составляло основу книги. Я не знаю, много ли народу их прочитало. Но вот прикладники использовали книгу довольно интенсивно. К сожалению, этому есть простое объяснение, вследствие которого возникают большие сомнения в полезности моей книги. Василий Васильевич Налимов, лидер планирования эксперимента в Советской России, говорил, что одним из трех китов, на которых держится планирование эксперимента в России, являются аспиранты. И это действительно так и было. Аспиранты очень многих специальностей в медицине, биологии, фармацевтике, химической технологии, металлургии в середине 70-х годов просто накинулись на планирование эксперимента. Модные слова – кибернетика, планирование эксперимента – создавали наукообразие для их работ. И хотя никакой особой науки в том, чтобы применить простые методы в прикладных работах, не было, все они успешно защищали свои диссертации. А зачем нужно было работникам различных отраслей промышленности, не связанным с академической работой, защищать диссертации, было всем ясно: в соответствии с законами социалистической командной экономики защита диссертации автоматически удваивала заработную плату. Так что для диссертантов моя книга была чрезвычайно полезна – она помогала им удвоить их жалование. Правда, отсюда следует, что книга моя уменьшала покупательную способность денег, имеющихся в наличии у всего остального населения советской страны. И, значит, была для остального населения вредна.

Однако, несмотря ни на что, я вспоминаю те далекие теперь семидесятые, когда я писал эту книгу, с большой теплотой. Я помню многих симпатичных людей, связанных общей научной идеей, которая казалась тогда необычайно плодотворной.

Все это, и особенно на первых порах, происходило в Московском университете, в Межфакультетской лаборатории статистических методов, возглавляемой А.Н. Колмогоровым, в отделе планирования эксперимента, которым заведовал В.В. Налимов. Я был в его отделе желанным гостем. Был активным участником его семинара. Наряду с его сотрудниками публиковался в издательстве Московского университета. Пользовался знаменитой Колмогоровской библиотекой статистической литературы. Мне даже разрешалось уносить с собой на время драгоценные статистические журналы. И, самое главное, мне казалось, что в этом коллективе советский дух не чувствовался (хотя, конечно же, он проникал всюду).

Еще одним таким коллективом была математическая секция журнала «Заводская лаборатория», где я проработал (на общественных началах) почти двадцать пять лет, вплоть до моего отъезда в 1991 году из Советской России. Это был единственный печатный орган, где наряду с теоретическими исследованиями публиковалось много прикладных статистических работ. Возглавлял секцию Б.В. Гнеденко. Но он приходил на наши заседания не часто, и обязанности председателя фактически выполнял Налимов. Было нечто, что отличало работу этой секции от других редакционных коллективов. Если статья содержала здравую идею, то уже ничто – ни запутанность изложения, ни плохой язык, ни даже некоторые поправимые ошибки – не могло помешать ее публикации (после доработки, разумеется), даже если автор статьи был никому не известен. Стиль – недостижимый, как я вижу сейчас, даже для ведущих статистических журналов Америки.

Эти два оазиса для меня были спасением. Они давали возможность какого-то осмысленного существования (в стране, где осмысленного существования, казалось бы, вообще не могло быть). И они создавали атмосферу, которая позволяла как бы отгородиться от окружающей тебя социалистической вакханалии (или, по крайней мере, позволяла о ней на время забыть).

Такова вкратце история первого издания моей книги.

Теперь – о втором издании. Оно не сильно отличается от первого, хотя я сделал в нем некоторые добавления и поправки и пополнил библиографию работ по факторному планированию.

Все сделанные во втором издании добавления основаны на тех работах, которые были опубликованы мной (в том числе, с коллегами) через несколько лет после первого издания книги (в большинстве – в конце 70-х годов). Однако я все-таки решил это второе издание выпустить в свет сейчас. Основной причиной было то, что по прошествии многих лет я не увидел большого развития в той области, где я работал когда-то. Я не говорю о методах построения – здесь появилось много новых работ. Я говорю о самом основании факторного планирования эксперимента, на которое я делал главный упор в своей книге. Вот поэтому я и решил выпустить второе издание, которое, как я надеюсь, будет более доступным для потенциальных читателей, чем первое.

В предисловии к первому изданию я говорил о том, что цель настоящей книги – основания факторного планирования. Я также говорил о том, что в сотнях журнальных публикаций нет консенсуса по поводу определения понятия факторного планирования. Это, на самом деле, было мягко сказано. В действительности я не видел ни тогда, когда я писал эту книгу, ни сейчас, когда я готовлю ее второе издание, ни одного удобоваримого определения понятия «факторные планы» в статистической литературе.

D. Raghavarao в своей замечательной книге “Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments” говорит, что факторное планирование эксперимента возникает тогда, когда исследуются различные комбинации факторов на нескольких уровнях. Однако в любом многомерном плане эксперимента исследуются различные комбинации факторов. В чем же тогда состоит особенность факторного планирования? Надо понимать, что Raghavarao исключает из своего определения одномерный случай, хотя он не говорит об этом явно.

Во многих книгах условие многомерности явно включается в определение факторного планирования. Например, так поступают R. Mukerjee и C. F. J. Wu в своей в целом блестящей книге “A Modern Theory of Factorial Designs”. Они определяют факторный эксперимент как такой, который включает n (≥ 2) факторов на $s_1, \dots, s_n$ (≥ 2) уровнях. Однако из приведенных определений не ясно, чем же отличается факторное планирование от любого другого многомерного планирования. Например, для определения R. Mukerjee и C. F. J. Wu любой многомерный эксперимент должен считаться факторным. И, следовательно, такое определение малопродуктивно.

Но не в этом только заключается беда такого определения. Его беда состоит также и в том, что авторы многочисленных работ в различных областях планирования эксперимента вряд ли будут согласны с таким подходом к определению факторного планирования. Будут ли авторы работ, скажем, по полиномиальным планам (включающим, в частности, ротатабельное планирование) считать, что они пишут о факторных планах? Думаю, что не будут. И в действительности никто из них никогда не использовал такое понятие как «ротатабельные факторные планы». Никто не называл, скажем, ротатабельный план второго порядка от двух переменных факторным планом, представимым в виде дробной реплики плана 5^2 (хотя в нем исследуются комбинации двух факторов, на пяти уровнях каждый).

Что можно сказать о планах, построенных численными процедурами, удовлетворяющих, скажем, критерию D-оптимальности, для различных моделей и областей, как это делал В. В. Федоров в развитие идей Кифера-Вольфовица (J. Kiefer, J. Wolfowitz)? Будут ли авторы статей и их читатели считать такие планы «*D*-оптимальными факторными планами» только потому, что они многомерны? Нет, конечно.

Что можно сказать об авторах книг по планированию эксперимента? Следуют ли они определению факторного планирования как многомерного? Поступают ли они так, например, когда думают о структуре своей книги? Нет, никто такому определению не следует. В противоположность такому подходу в книгах по общим вопросам планирования эксперимента (в том числе в цитируемой выше книге D. Raghavarao) факторные планы рассматриваются отдельно от других разделов (например, по ротатабельному планированию). С другой стороны, книги по факторным планам (включая упомянутую выше книгу R. Mukerjee и C. F. J. Wu) раздел по ротатабельному планированию не содержат. Значит, авторы книг по планированию эксперимента на самом деле не следуют определению факторного планирования как многомерного. Они структурируют свою книгу на основе некоего интуитивного представления о том, что понимается под факторными планами. И это их интуитивное представление вовсе не связано с тем, является ли план одномерным или многомерным.

Так вот одной из целей моей книги было ввести понятия «факторные планы» и «факторные модели» таким образом, чтобы отразить эти интуитивные представления авторов работ по факторным планам. Но главное было не в том, чтобы просто ввести определения, которые не испугают тех, кто занимается исследованиями в области планирования эксперимента. Главное в моей книге состоит в том, что введенные определения оказались довольно продуктивными. Они позволили развить некоторую теорию, охватывающую многие важные аспекты планирования, включая эффективность статистических выводов и построение планов.

Еще несколько слов о терминологии. Ряд авторов стали называть планы, получаемые из конечных проективных геометрий, регулярными. Мной понятие регулярности факторных планов в середине 70-х, когда я выпускал первое издание книги, было закреплено за планами, обладающими некоторыми статистическими свойствами. А планы, которые получаются из конечных проективных геометрий, я называл геометрическими. Во втором издании я, естественно, оставляю название геометрических планов для планов, получаемых из конечных проективных геометрий.

Книга содержит не только мои результаты, она включает также результаты, полученные другими авторами (в основном это касается методов построения планов). В этой связи я хочу заметить, что во втором издании я не стремился включить все последние достижения, относящиеся к методам построения новых факторных планов. Прежде всего потому, что я рассматривал методы построения как иллюстрацию более общих положений книги. А во-вторых, я все-таки стремился дать все те методы, которые важны для приложений.

Первые две главы моей книги – справочные. В главе 1 приведены необходимые для чтения книги сведения по математике, а главе 2 – по статистике. Во всех остальных главах я попытался изложить все основные результаты теории факторного планирования. Значительное количество результатов было получено мной, и тогда я даю соответствующую теорему без литературной ссылки. Эти результаты были получены мной большей частью в середине 70-х годов, когда я работал над первым изданием книги. Если какая-то из приведенных в книге теорем принадлежит не мне, я даю соответствующую ссылку либо прямо после слова «теорема» (чаще всего), либо в примыкающем тексте, вместе с пояснением. Теоремы первых двух справочных глав широко известны и даются без ссылок.

Несколько слов благодарности в заключение. Владимир Алешин и Игорь Мандель оказали мне большую помощь при подготовке второго издания книги, и мне приятно их за это поблагодарить.

Глава 1. Конечные поля и конечные геометрии

§ 1. Поля Галуа

Определение 1.1.1. Конечное множество из s элементов $a_0,\ a_1, \ldots, a_{s-1}$ с определенными операциями комбинирования любых двух из них называется конечным коммутативным кольцом $\mathcal{R}$ порядка s, если для всех a_i , a_j, a_n из $\mathcal{R}$ выполняются следующие аксиомы:

1. Сложение (обозначаемое $a_i + a_j$) и умножение (обозначаемое $a_i a_j$) являются бинарными операциями:

$a_i + a_j \in \mathcal{R}, a_i + a_j \in \mathcal{R}.$

2. Сложение коммутативно:

$a_i + a_j = a_j + a_i$.

3. Умножение коммутативно:

$a_i a_j = a_j a_i$.

4. Сложение ассоциативно:

$a_i + (a_j + a_n) = (a_i + a_j) + a_n$.

5. Умножение ассоциативно:

$a_i(a_j a_n) = (a_i a_j)a_n$.

6. Сложение и умножение подчиняются закону дистрибутивности:

$a_i(a_j + a_n) = a_i a_j + a_i a_n$.

7. Существует обратная по отношению к сложению операция – вычитание: для любой пары элементов a_i и a_j существует такой элемент a_n (называемый разностью a_i и a_j и обозначаемый $a_n = a_i - a_j$), притом лишь единственный, для которого выполняется равенство

$a_i = a_j + a_n$.

Из определения конечного коммутативного кольца вытекают следующие его свойства:

1. Существует нулевой элемент a_0, притом лишь единственный, такой, что для любого a_i из кольца

$a_i + a_0 = a_i$.

2. Для любого a_i из кольца существует однозначно определенный обратный элемент по отношению к сложению ($-a_i$) такой, что

$a_i + (-a_i) = a_0$.

3. Для любых элементов a_i, a_j из кольца

$a_i a_0 = a_0$, $(-a_i)a_j = -a_i a_j$, $(-a_i)(-a_j) = a_i a_j$.

Определение 1.1.2. Конечное коммутативное кольцо порядка s называется конечным полем $\mathcal{F}$ порядка s, если оно содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля, и существует обратная по отношению к умножению операция – деление, то есть для любой пары элементов a_i и a_j (a_j – отличен от нуля) существует такой элемент a_n (называемый частным a_i и a_j и обозначаемый $a_n = a_i/a_j$), притом лишь единственный, для которого выполняется равенство

$a_i = a_j a_n$.

Из определения конечного поля вытекают следующие его свойства:

1. Существует единичный элемент a_1, притом лишь единственный, такой, что для любого $a_i \in \mathcal{F}$

$a_i a_1 = a_i$.

2. Для любого $a_i \in \mathcal{F}$ существует однозначно определенный обратный элемент по отношению к умножению a_i^{-1} такой, что

$a_i a_i^{-1} = a_1$.

3. Для любых элементов a_i, $a_j \in \mathcal{F}$

$a_i^{-1} = a_1/a_i$, $a_i/a_j = a_i a_j^{-1}$, $\left(a_i^{-1}\right)^n = (a_i^n)^{-1}$.

Нулевой элемент a_0 и единичный элемент a_1 поля будем обозначать также через 0 и 1 соответственно.

Определение 1.1.3. Говорят, что целые числа a и b сравнимы по модулю p (p натуральное, отличное от 1), и записывают $a \equiv b \pmod p$, если разность $a - b$ нацело делится на p.

Определение 1.1.4. Классом вычетов по заданному модулю p называется множество целых чисел, сравнимых по модулю p.

Все кольцо целых чисел распадается на p непересекающихся классов $C_0, \dots, C_{p-1}$ вычетов по заданному модулю p, причем класс C_i ($i = 0,1, \dots, p-1$) состоит из чисел, дающих при делении на p в остатке i. Сложение и умножение этих классов можно определить следующим естественным образом:

$C_i + C_j = C_{i+j}$ при $i + j < p$,

$C_i + C_j = C_{i+j-p}$ при $i + j \geq p$,

$C_i C_j = C_r$,

где $ij = pq + r$ $(0 \leq r \leq p)$.

По отношению к введенным операциям система классов вычетов по заданному модулю p является кольцом. Такое кольцо есть поле тогда и только тогда, когда p простое. Поля классов вычетов по простому модулю p

называются простыми полями или полями Галуа порядка p и обозначаются $GF(p)$.

Пусть x – алгебраическое число над полем $GF(p)$. Рассмотрим все полиномы от x с коэффициентами в $GF(p)$. Положим теперь, что $P(x)$– заданный неприводимый полином в $GF(p)$ степени h. Для любого полинома $T(x)$ с целыми коэффициентами полином

$$t(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{h-1} x^{h-1}$$
$$(a_i \in GF(p),\;\; i = 0,1, \dots , h - 1)$$

называется вычетом $T(x)$ по модулям p и $P(x)$, если

$$T(x) = t(x) + pq(x) + P(x)Q(x),$$

где $q(x)$ и $Q(x)$ – полиномы от x с целыми коэффициентами.

Это соотношение между $T(x)$ и $\mathrm{t}(x)$ может быть записано следующим образом:

$$T(x) \equiv t(x) \mathrm{mod}\, [p, P(x)].$$

Конечное поле, образуемое при помощи p^h классов вычетов по модулям p и $P(x)$, называется полем Галуа порядка p^h и обозначается $GF\left(p^h\right)$.

Конечное поле порядка s существует тогда и только тогда, когда $s = p^h$ (p простое, h целое). Все конечные поля одного и того же порядка изоморфны.

Определение 1.1.5. Ненулевой элемент конечного поля, являющийся точным квадратом, называется квадратичным вычетом поля. Все остальные ненулевые элементы называются квадратичными невычетами.

Символ Лежандра $(a_{\mathrm{i}}/\mathrm{s})$, где $a_{\mathrm{i}} \in GF(s)$, определяется равенством

$$(a_{\mathrm{i}}/\mathrm{s}) = \begin{cases} +1, \text{если } a_i \text{ есть квадратичный вычет,} \\ -1, \text{если } a_i \text{ есть квадратичный невычет.} \end{cases}$$

Известные свойства символа Лежандра:

$$\textstyle\sum_{n \neq i,j} \left(\frac{a_n - a_i}{s}\right)\left(\frac{a_n - a_j}{s}\right) = -1 \quad (i \neq j), \tag{1.1.1}$$

$$\textstyle\sum_i \left(\frac{a_i}{s}\right) = 0, \tag{1.1.2}$$

$$\left(\frac{-1}{\mathrm{s}}\right) = (-1)^{(s-1)/2} \quad (\mathrm{s} > 2), \tag{1.1.3}$$

$$\left(\frac{a_i a_j}{s}\right) = \left(\frac{a_i}{s}\right)\left(\frac{a_j}{s}\right), \tag{1.1.4}$$

где $a_n,\ a_i,\ a_i \in GF(s)$.

Определение 1.1.6. Примитивным элементом конечного поля порядка s называется такой элемент a_n , наименьшая степень которого, равная единичному элементу, есть $s - 1$.

Для любого конечного поля существует по крайней мере один примитивный элемент a_n. Любой элемент поля a_i $(a_i \neq 0)$ представим в виде $a_i = a_n^h$.

Пример 1.1.1. Для поля $GF(4)$ с элементами, обозначаемыми символами 0, 1, 2 и 3, следующие таблицы сложения и умножения удовлетворяют аксиомам конечного поля:

Таблица сложения

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Таблица умножения

×	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Определение 1.1.7. Конечное множество из s элементов называется конечной аддитивной группой порядка s, если определенная в нем операция сложения ассоциативна (но не обязательно коммутативна) и обладает обратной операцией – вычитанием.

Ввиду некоммутативности сложения существование обратной операции означает следующее: для любой пары a_i , a_j из группы существуют однозначно определенные элементы a_n и a_k такие, что $a_n + a_i = a_j$ и $a_i + a_k = a_j$. Очевидно, что всякое конечное кольцо, в частности, поле Галуа, по сложению является конечной аддитивной группой.

§ 2. Конечные проективные геометрии

Определение 1.2.1. Конечная проективная плоскость есть множество элементов, называемых точками, и подмножества этих точек, называемые прямыми, при условии выполнения аксиом:

1. Существует одна и только одна прямая, проходящая через две различные точки.
2. Для любой пары прямых существует точка, принадлежащая обеим прямым (эта точка называется пересечением этих прямых).
3. Существуют четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Из аксиом 1 и 2 следует, что существует точно одна точка, являющаяся пересечением двух прямых. Из аксиомы 3 вытекает, что любая прямая содержит по крайней мере три точки и что через любую точку проходит по крайней мере три прямых.

Теорема 1.2.1. Пусть s $\geq$ 2 – целое число. В проективной плоскости π любое из следующих свойств влечет все остальные:

1. Некоторая прямая содержит точно s + 1 точек.
2. Некоторая точка лежит точно на s + 1 прямых.
3. Каждая прямая содержит точно s + 1 точек.
4. Каждая точка лежит точно на s + 1 прямых.
5. В π существует точно $s^2 + s + 1$ точек.
6. В π существует точно $s^2 + s + 1$ прямых.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Холла [1].

Определение 1.2.2. Конечная проективная плоскость имеет порядок s, если некоторая ее прямая содержит точно s + 1 точек.

Пример 1.2.1. Наиболее простая конечная проективная плоскость имеет порядок s = 2. В ней вследствие теоремы 1.2.1 имеется точно 7 точек и 7 прямых. Каждая прямая содержит точно 3 точки, и через каждую точку проходят точно 3 прямых. Пусть точки этой проективной плоскости – *A*, *B*, *C*, *D, E, F* и *G*. Прямые – *ADC*, *AGE*, *AFB*, *CGF, CEB, DGB* и *DEF*. Геометрическая иллюстрация этой проективной плоскости представлена на рис. 1.

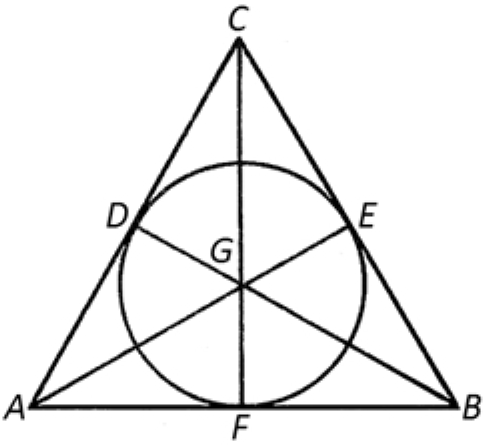


Рис. 1. Проективная плоскость второго порядка

Нетрудно проверить, что для построенной системы выполняются все три аксиомы проективной плоскости.

Расширим теперь введенное определение на пространства более высокой размерности [2].

Определение 1.2.3. Конечной проективной геометрией называется конечное множество точек и подмножества этих точек, называемые прямыми, при условии выполнения аксиом:

1. Существует одна и только одна прямая, проходящая через две точки.
2. Каждая прямая содержит не менее трех точек.
3. Если A, B и C – три точки, не лежащие на одной прямой, $\mathrm{D}(\neq \mathrm{A})$ – точка на прямой, проходящей через A и B, $\mathrm{E}(\neq \mathrm{A})$ – точка на прямой, проходящей через A и C, то существует точка F, лежащая на прямой, проходящей через D и E, и на прямой, проходящей через B и C.

Размерность проективной геометрии, или проективного пространства, определяется рекуррентно. Если Z_{n-1} – пространство размерности $n-1$, A – точка, не принадлежащая Z_{n-1} , то множество всех точек на всех прямых AB, где B – точка, принадлежащая Z_{n-1}, есть пространство размерности n. Таким образом, прямая есть одномерное пространство. Существование пространства размерности $m > 1$ (или m-мерного пространства, или m-пространства) обеспечивается следующими двумя аксиомами:

4. Если $l < m$, то не все рассматриваемые точки принадлежат одному и тому же l-пространству.
5. Во множестве рассматриваемых точек не существует $(m+1)$-пространства.

Точка есть проективное пространство размерности 0. Конечное проективное пространство размерности 2 есть конечная проективная плоскость (см. определение 1.2.1). Если рассматривать l-пространство как подпространство пространства высшей размерности, то можно назвать это подпространство также l-плоскостью. $(m-1)$-плоскость в -мерном пространстве называется гиперплоскостью.

Способ построения одного типа конечной геометрии состоит в следующем [2]. Определим точку конечного пространства $PG(m,s)$ размерности m (или m-пространства) как упорядоченное множество из $m+1$ координат $(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_m)$, где χ_i есть элементы поля Галуа $GF(s)$, не равные одновременно нулю. Координаты χ_i будем рассматривать как однородные, то есть точка $(\lambda\chi_0, \lambda\chi_1, \dots, \lambda\chi_m)$ будет считаться совпадающей с точкой $(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_m)$ для любого $\lambda \neq 0$, принадлежащего *GF(s)*. Таким образом, очевидно, что общее число различных точек в $PG(m,s)$ равно

$$V(m,0,s) = \frac{s^{m+1}-1}{s-1}.$$

Проективная геометрия $PG(m,s)$ содержит n-плоскости $(n = 0, 1, \dots, m-1)$, или n-мерные подпространства, определяемые как множество всех точек, координаты которых удовлетворяют $m-n$ независимым линейным однородным уравнениям с коэффициентами из *GF(s)*:

$$
\begin{array}{l}
a_{10}\chi_0 + a_{11}\chi_1 + \cdots + a_{1m}\chi_m = 0, \\
a_{20}\chi_0 + a_{21}\chi_1 + \cdots + a_{2m}\chi_m = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m-n,0}\chi_0 + a_{m-n,1}\chi_1 + \cdots + a_{m-n,m}\chi_m = 0.
\end{array}
\qquad (1.2.1)
$$

Можно определить n-плоскость эквивалентно другим способом. Пусть $n + 1$ точек

$$\boldsymbol{\chi}_0 = (\chi_{00}, \chi_{01}, \dots, \chi_{0m}), \dots, \boldsymbol{\chi}_n = (\chi_{n0}, \chi_{n1}, \dots, \chi_{nm})$$

линейно независимы, то есть матрица

$$\begin{Vmatrix} \chi_{00} & \chi_{01} & \cdots & \chi_{0m} \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \cdots & \chi_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{n0} & \chi_{n1} & \cdots & \chi_{nm} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\chi}_0 \\ \boldsymbol{\chi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\chi}_n \end{Vmatrix}$$

имеет ранг $n + 1$. Тогда n-плоскость состоит из всех точек

$$a_0\boldsymbol{\chi}_0 + a_1\boldsymbol{\chi}_1 + \dots + a_n\boldsymbol{\chi}_n,$$

где $a_i \in GF(s)$ и a_i не равны одновременно нулю; $\boldsymbol{\chi}_i$ – линейно независимые точки с координатами, удовлетворяющими уравнениям (1.2.1). Можно доказать [2], что $PG(m, s)$ удовлетворяет всем пяти аксиомам конечного проективного пространства и показать, что число n-плоскостей в $PG(m, s)$ равно числу $(m - n - 1)$-плоскостей и равно

$$V(m, n, s) = \frac{(s^{m+1} - 1)(s^m - 1) \dots (s^{m-n+1} - 1)}{(s^{n+1} - 1)(s^n - 1) \dots (s - 1)}.$$

Число t-плоскостей в $PG(m, s)$, которые содержат данную n-плоскость $(n \neq t)$, равно числу $(m - t - 1)$-плоскостей, содержащихся в $(m - n - 1)$-плоскости,

$$V(m - n - 1, m - t - 1, s) = V(m - n - 1, t - n - 1, s)$$
$$= \frac{(s^{m-n} - 1)(s^{m-n-1} - 1) \dots (s^{t-n+1} - 1)}{(s^{m-t} - 1)(s^{m-t-1} - 1) \dots (s - 1)}.$$

В частности, каждая n-плоскость содержит

$$V(n, 0, s) = \frac{s^{n+1} - 1}{s - 1}$$

точек. Например, прямая (1-плоскость) содержит $s + 1$ точек, 2-плоскость содержит $s^2 + s + 1$ точек.

Определение 1.2.4 [3]. Пусть $X_i \in PG(m, s)$ $\left(i = 1, \dots, m;\ s = p^h\right)$ и для всех X_i координата $\chi_i = 1$, а остальные координаты, включая χ_0, равны нулю. Это множество точек X_i называется фундаментальным симплексом.

Точки X_i называются вершинами (или 0-гранями) фундаментального симплекса, прямые $X_i X_j$ $(i \neq j)$ – его ребрами (или 1-гранями). И вообще, $(n-1)$-мерная плоскость, образуемая любыми n из m вершин X_1, ... , X_m $(n < m)$, называется $(n-1)$-гранью фундаментального симплекса.

§ 3. Конечные евклидовы пространства

Определение 1.3.1. Конечным евклидовым пространством $EG(m, s)$ размерности m будем называть подмножество точек $PG(m, s)$ с первой координатой χ_0, не равной нулю.

Так как координаты точек $PG(m, s)$ однородны, можно положить первую координату χ_0 равной 1. Поэтому точки $EG(m, s)$ можно задавать упорядоченным множеством точек $(\chi_1, \ \dots, \ \chi_m)$, где χ_i есть элементы поля Галуа $GF(s)$. Таким образом, $EG(m, s)$ получается из $PG(m, s)$ исключением гиперплоскости $\chi_0 = 0$ со всеми ее плоскостями. Эти плоскости называются плоскостями на бесконечности. Те из остающихся плоскостей (принадлежащих $EG(m, s)$), которые пересекаются только на бесконечности, называются параллельными.

Легко показать [2], что имеется

$$V(m, n, s) - V(m-1, n, s) \qquad (1.3.1)$$

n-плоскостей в $EG(m, s)$. Например, имеется $s(s^m - 1)/(s-1)$ гиперплоскостей и s^m точек в $EG(m, s)$. С помощью формулы (1.3.1) можно также найти число n-плоскостей в m-плоскости в пространстве высшей размерности.

Число t-плоскостей, проходящих через n-плоскость, таково же, как и в $PG(m, s)$.

n-плоскость в $EG(m, s)$ содержит все s^n точек, которые удовлетворяют $m - n$ линейно независимым уравнениям вида

$$\begin{aligned}
&a_{01} + a_{11}\chi_1 + \dots + a_{m1}\chi_m = 0,\\
&a_{02} + a_{12}\chi_1 + \dots + a_{m2}\chi_m = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{0,m-n} + a_{1,m-n}\chi_1 + \dots + a_{m,m-n}\chi_m = 0.
\end{aligned}$$

В частности, гиперплоскость в $EG(m, s)$ определяется уравнением

$$a_0 + a_1\chi_1 + \dots + a_m\chi_m = 0. \qquad (1.3.2)$$

Любая гиперплоскость (1.3.2) в $EG(m, s)$ может быть расширена до плоскости

$$a_0\chi_0 + a_1\chi_1 + \dots + a_m\chi_m = 0 \qquad (1.3.3)$$

в $PG(m,s)$. Точки (1.3.2) таковы же, как и конечные точки (1.3.3), но плоскость (1.3.3) имеет также точки на бесконечности, которые лежат на $(m-2)$-плоскости

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_m\chi_m = 0, \ \ \chi_0 = 0. \tag{1.3.4}$$

Если a_0 будет пробегать в выражении (1.3.2) все s возможных значений из $GF(s)$ при фиксированных значениях $a_1, \ \dots, \ a_m$, то получим пучок $P(a_1, \ \dots, \ a_m)$ параллельных $(m-1)$-плоскостей в $EG(m,s)$. Через любую точку $EG(m,s)$ проходит точно одна гиперплоскость пучка $P(a_1, \ \dots, \ a_m)$. В $EG(m,s)$ нет двух гиперплоскостей пучка $P(a_1, \ \dots, \ a_m)$, имеющих общую точку, но будучи расширены до бесконечности, они пересекаются в плоскости (1.3.4) в $PG(m,s)$. Это пересечение называется вершиной пучка $(a_1, \ \dots, \ a_m)$. Числа $a_1, \ \dots, \ a_m$ называются координатами пучка.

Очевидно, что пучок $P(a_1, \ \dots, \ a_m)$ параллельных гиперплоскостей в $EG(m,s)$ совпадает с пучком $P(\lambda a_1, \ \dots, \ \lambda a_m)$, где $\lambda \neq 0$. Однозначного представления пучков можно добиться, считая, что первая координата пучка есть 1. Таким образом, имеется $(s^m-1)/(s-1)$ различных пучков параллельных гиперплоскостей в $EG(m,s)$.

Пусть $\mathcal{F}$ – любая $(m-n-1)$-плоскость на бесконечности. Тогда существуют $(s^{n+1}-1)/(s-1)$ различных $(m-n)$-плоскостей, проходящих через $\mathcal{F}$ и $(s^n-1)/(s-1)$ из них целиком лежат на бесконечности, в то время как s^n принадлежат $EG(m,s)$. Таким образом, имеется точно s^n $(m-n)$-плоскостей в $EG(m,s)$, которые при расширении их на бесконечность, проходят через $(m-n-1)$-плоскость $\mathcal{F}$. Можно сказать, что эти s^n $(m-n)$-плоскостей образуют связку плоскостей с вершиной $\mathcal{F}$.

Литература

1. Hall, M. (1967). *Combinatorial Theory*, Waltham, Mass.: Blaisdel Company.

2. Vajda, S. (1967). *Patterns and configurations in infinite spaces*. Griffin's Statistical Monographs and Courses, N 22. New York: Hafner Publ. Co.

3. Bose, R.C. (1947). Mathematical theory of the symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **8**, 107–166.

Глава 2. Регрессионный анализ

§ 1. Модель и общие предположения

В книге будут рассматриваться модели, линейные по параметрам. Это означает, что изучаемые зависимости имеют вид

$$\eta = \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\boldsymbol{\Theta}, \tag{2.1.1}$$

где η – некоторая зависимая переменная; $\boldsymbol{\Theta}^T = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ – вектор неизвестных параметров; $\mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m) = \{f_1(X_1, \dots, X_m), \dots, f_k(X_1, \dots, X_m)\}$ – вектор известных функций.

Для высказывания некоторых суждений о модели (2.1.1) будем использовать результаты N наблюдений $y_1, \dots, y_N$, которые дают с ошибками ε_u $(u = 1, \dots, N)$ значения $\eta_u = \eta(X_{1u}, \dots, X_{mu})$, где $X_{1u}, \dots, X_{mu}$ – значения, которые принимают соответственно переменные $X_1, \dots, X_m$ в u-м эксперименте. Область возможных изменений значений переменных $X_1, \dots, X_m$, при которых можно проводить эксперимент, образует область измерений, или область планирования.

Относительно ошибок $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ будем всюду далее предполагать, что

$$E\varepsilon_i = 0;\ \ E\varepsilon_i\varepsilon_j = 0;\ \ E\varepsilon_i^2 = \sigma^2\ \ (i, j = 1, \dots, N),$$

или (в матричном виде)

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0; \quad \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{E}_N\sigma^2, \tag{2.1.2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$; $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ – ковариационная матрица вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$; $\mathbf{E}_{\mathrm{N}}$ – единичная матрица порядка N.

Таким образом,

$$y_u = \mathbf{f}^T(X_{1u}, \dots, X_{mu})\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_u. \tag{2.1.3}$$

Матрицу

$$\mathbf{D}_X = \left\| \begin{matrix} X_{11} & \dots & X_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & \cdots & X_{mN} \end{matrix} \right\| \tag{2.1.4}$$

назовем матрицей плана или планом.

Равенство (2.1.3) может быть переписано в матричном виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.1.5}$$

или вследствие (2.1.2)

$$E\mathbf{y} = \mathbf{X\Theta},$$

где $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_N)$, и

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} f_1(X_{11}, \dots, X_{m1}) & \dots & f_k(X_{11}, \dots, X_{m1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(X_{1N}, \dots, X_{mN}) & \cdots & f_k(X_{1N}, \dots, X_{mN}) \end{Vmatrix}.$$

Матрицу $\mathbf{X}$ будем называть матрицей коэффициентов плана $\mathbf{D}_X$ для модели (2.1.5). Матрица $\mathbf{X}$ часто называется матрицей независимых переменных. Однако далее наряду со случаем матрицы $\mathbf{X}$ полного ранга будем рассматривать случай неполного ранга матрицы $\mathbf{X}$. Тогда термин «матрица коэффициентов» будет более удачным.

§ 2. Оценивание параметров и параметрических функций

Оценки $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$ будем находить при помощи метода наименьших квадратов, то есть минимизируя выражение

$$\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{\Theta}}\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{\Theta}}\right) = \boldsymbol{y}^T\mathbf{y} - 2\widehat{\mathbf{\Theta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{\Theta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\widehat{\mathbf{\Theta}}\,. \qquad (2.2.1)$$

Матрица моментов, или информационная матрица, $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ будет неотрицательной. Если же $\mathbf{X}$ – матрица полного ранга, $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ будет невырожденной и положительно определенной. В последнем случае минимум выражения (2.2.1) достигается в единственной точке $\widehat{\mathbf{\Theta}} = \left(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k\right)$, которую можно найти как единственное решение так называемых нормальных уравнений метода наименьших квадратов

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\widehat{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{X}^T\mathbf{y}\,. \qquad (2.2.2)$$

В этом случае

$$\widehat{\mathbf{\Theta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}\,. \qquad (2.2.3)$$

Это решение $\widehat{\mathbf{\Theta}} = \left(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k\right)$ называется м.н.к.-оценками (оценками метода наименьших квадратов) параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$. Эти оценки обладают некоторыми хорошими свойствами:

1. Вектор $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ – несмещенная оценка вектора $\mathbf{\Theta}$, то есть $E\widehat{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{\Theta}$.
2. $\hat{\theta}_i$ есть линейная функция наблюдений, и дисперсия оценки $\hat{\theta}_i$ минимальна среди любых линейных несмещенных функций наблюдений.

Пока не оговорено противное, будем рассматривать случай полного ранга матрицы коэффициентов $\mathbf{X}$.

Оценка $\mathbf{P}^T\widehat{\mathbf{\Theta}}$ некоторой параметрической функции $\mathbf{P}^T\mathbf{\Theta}$ (где $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ – м.н.к.-оценка вектора $\mathbf{\Theta}$) называется м.н.к.-оценкой параметрической функции $\mathbf{P}^T\mathbf{\Theta}$.

Значение функции $\eta = \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\boldsymbol{\Theta}$ в любой точке $(X_1, \dots, X_m)$ есть одна из параметрических функций. М.н.к.-оценкой этой функции будет значение регрессионной функции $\hat{y} = \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ в точке $(X_1, \dots, X_m)$.

Свойства м.н.к.-оценки параметрической функции аналогичны свойствам м.н.к.-оценки вектора параметров $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$:

1. $\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ есть несмещенная оценка параметрической функции $\mathbf{P}^T\boldsymbol{\Theta}$, то есть $E\left(\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) = \mathbf{P}^T\boldsymbol{\Theta}$.

2. Оценка $\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ есть линейная функция наблюдений, и дисперсия оценки $\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ минимальна среди всех линейных несмещенных функций наблюдений.

Ковариационная матрица вектора м.н.к.-оценок $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ находится следующим образом:

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\sigma^2. \tag{2.2.4}$$

Дисперсия м.н.к.-оценки параметрической функции $\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ есть

$$\sigma^2\left\{\mathbf{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right\} = \mathbf{P}^T\boldsymbol{\Gamma}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right)\mathbf{P}\,. \tag{2.2.5}$$

Представляют интерес оценки l параметрических функций $\mathbf{P}_1^T\boldsymbol{\Theta}$, … , $\mathbf{P}_l^T\boldsymbol{\Theta}$ или (в матричном виде) оценка параметрического вектора $\mathbf{T}\boldsymbol{\Theta}$. Тогда вектор м.н.к.-оценок $\mathbf{T}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ имеет ковариационную матрицу $\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right)\mathbf{T}^T$.

Для заданного плана $\mathbf{D}$ и для модели (2.1.3) рассмотрим k-мерный эллипсоид, центр которого совпадает с точкой $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ – м.н.к.-оценкой вектора параметров модели (2.1.3) при помощи плана $\mathbf{D}$. Эллипсоид выберем таким, чтобы при условии постоянства плотности распределения в нем, моменты второго порядка этого распределения образовывали ковариационную матрицу м.н.к.-оценок вектора $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ (2.2.4). Этот эллипсоид называется эллипсоидом рассеяния вектора $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ оценок параметров.

Сформулируем еще несколько хороших свойств, которыми обладают м.н.к.-оценки:

3. Для любой несмещенной линейной оценки $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}$

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right) = \boldsymbol{\Gamma}\left(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}\right) - \boldsymbol{\gamma}, \tag{2.2.6}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — некоторая неотрицательно определенная матрица.

Следующие три свойства являются следствием соотношения (2.2.6).

4. М.н.к.-оценки имеют наименьшую обобщенную дисперсию, то есть наименьший определитель ковариационной матрицы:

$$\det\left\{\boldsymbol{\Gamma}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}\right)\right\} \le \det\left\{\boldsymbol{\Gamma}\left(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}\right)\right\}.$$

5. М.н.к.-оценки приводят к наименьшему объему эллипсоида рассеяния оценок параметров.

6. Для м.н.к.-оценок

$$\mathrm{Tr}\{\mathbf{\Gamma}(\widehat{\mathbf{\Theta}})\} \le \mathrm{Tr}\{\mathbf{\Gamma}(\widetilde{\mathbf{\Theta}})\}.$$

§ 3. Оценивание дисперсии ошибки и проверка на неадекватность

Из равенства (2.2.2) следует, что минимум суммы квадратов (2.2.1), или остаточная сумма квадратов

$$R_0^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{\Theta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y}.$$

Известно, что $E(R_0^2) = (N-k)\sigma^2$. Поэтому

$$\hat{\sigma}^2 = R_0^2/(N-k) \tag{2.3.1}$$

есть несмещенная оценка дисперсии σ^2.

Другой способ нахождения оценки дисперсии ошибки состоит в использовании r серий повторных наблюдений

$$\begin{gathered} y_{11}, \dots, y_{1n_1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{r1}, \dots, y_{rn_r}, \end{gathered}$$

где $y_{ij} = \mathbf{f}^T(X_{1i}, \ \dots\ , X_{mi})\mathbf{\Theta} + \varepsilon_{ij}$.

В этом случае несмещенная оценка дисперсии ошибки есть

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^r n_i - r} = \frac{R_e^2}{n_e} \tag{2.3.2}$$

где

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}, \quad R_e^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2, \ n_e = \sum_{i=1}^r n_i - r.$$

Когда модель (2.1.3) справедлива, предпочтительнее использование оценки дисперсии ошибки (2.3.1). В то же время оценка (2.3.2) может быть использована для проверки модели (2.1.3) на неадекватность. Для этого необходимо пользоваться дополнительными предположениями относительно распределения ошибок ε_i.

Будем предполагать, что

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E}_N\sigma^2). \tag{2.3.3}$$

В этом случае статистика

$$\frac{\left(R_0^2 - R_e^2\right)/(N-k-n_e)}{R_e^2/n_e} \tag{2.3.4}$$

имеет F-распределение при $N-k-n_e$ и n_e степенях свободы. Поэтому следует сравнивать отношение (2.3.4) со $100(1-\alpha)\%$ -ной точкой F-распределения при $N-k-n_e$ и n_e степенях свободы. Если отношение

(2.3.4) значимо, это означает, что гипотеза о том, что модель имеет вид (2.1.3), скорее всего, неверна. В этом случае несмещенной оценкой дисперсии ошибки будет только оценка (2.3.2). Если отношение (2.3.4) незначимо, то нет оснований отвергать гипотезу о том, что модель имеет вид (2.1.3).

§ 4. Проверка гипотез и интервальное оценивание

Будем опять предполагать справедливость модели (2.1.3) и выполнение предпосылки (2.3.3).

Пусть проверяемая гипотеза имеет вид

$$\mathbf{T\Theta} = \mathbf{0}, \tag{2.4.1}$$

где $\mathrm{Rg}\,\mathbf{T} = q$.

Пусть общее решение (2.4.1) есть

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{Q\Theta}_n\,, \tag{2.4.2}$$

где $\mathbf{Q}$ — матрица размера $k \times (k-q)$; $\mathrm{Rg}\,\mathbf{Q} = k - q$ и $\mathbf{TQ} = \mathbf{0}$; $\mathbf{\Theta}_n$ – вектор из $(k-q)$ элементов, которые можно принять за новые параметры.

Постановка решения (2.4.2) в модель (2.1.3) приводит к редуцированной модели

$$\mathrm{E}\mathbf{y} = \mathbf{X\Theta} = \mathbf{XQ\Theta}_n, \tag{2.4.3}$$

где $\mathbf{XQ}$ – матрица размера $N \times (k-q)$.

Вектор параметров $\mathbf{\Theta}_n$ может быть оценен из новой модели (2.4.3) по методу наименьших квадратов в случае, если $\mathbf{XQ}$ есть матрица полного ранга. Но

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{XQ}) = \mathrm{Rg}\left\|\begin{matrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{T}\end{matrix}\right\| - \mathrm{Rg}\mathbf{T},$$

поэтому $\mathbf{XQ}$ есть матрица полного ранга тогда и только тогда, когда

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{T}\end{matrix}\right\|$$

есть матрица полного ранга.

Новая остаточная сумма квадратов имеет вид

$$R_n^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y},$$

где $\widehat{\mathbf{\Theta}}_n = \left(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^T\mathbf{XQ}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y}$.

Отношение

$$\frac{(R_n^2 - R_0^2)/q}{R_0^2/(N-k)}$$

имеет F-распределение при $N-k$ и q степенях свободы и может быть сравнено со $100(1-\alpha)$%-й точкой этого распределения.

Описанные вычисления можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица 1
Дисперсионный анализ

	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Отклонение от гипотезы $\mathbf{T\Theta}=0$	q	$R_n^2-R_0^2$	$(R_n^2-R_0^2)/q$
Остаточная сумма	$N-k$	$R_0^2=\min\limits_{\hat{\Theta}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Theta}}\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Theta}}\right)$	$R_0^2/(N-k)$
Остаточная сумма при условии $\mathbf{T\Theta}=\mathbf{0}$	$N-k+q$	$R_n^2=\min\limits_{\mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}=0}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Theta}}\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Theta}}\right)$	

Совместные доверительные интервалы для системы линейно независимых параметрических функций, задаваемых вектором параметрических функций $\mathbf{T\Theta}$, строятся на основании того, что

$$P\left\{\frac{\sigma^2\left(\mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}-\mathbf{T\Theta}\right)^T\left[\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\Theta}})\mathbf{T}^T\right]^{-1}\left(\mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\Theta}}-\mathbf{T\Theta}\right)}{q\hat{\sigma}^2}\leq F_\alpha\right\}=1-\alpha,$$

где $\hat{\sigma}^2$ задается выражением (2.3.1).

§ 5. Смещение регрессионных оценок

М.н.к.-оценка $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ есть несмещенная оценка вектора параметров $\boldsymbol{\Theta}$ только в том случае, когда постулируемая модель (2.1.5) верна. В противном случае оценки будут смещенными. Так, если истинная модель в отличие от постулируемой (2.1.5) имеет вид

$$E\mathbf{y}=\mathbf{X\Theta}+\mathbf{X}_0\boldsymbol{\Theta}_0,$$

то есть содержит члены $\mathbf{X}_0\boldsymbol{\Theta}_0$, которые не учитывались при оценке параметров $\boldsymbol{\Theta}$, то

$$E\hat{\boldsymbol{\Theta}}=\boldsymbol{\Theta}+(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}_0\boldsymbol{\Theta}_0\,. \qquad (2.5.1)$$

Матрица $\mathbf{A}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}_0$ называется матрицей смещения. Смещение $\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}_0$, как видно из равенства (2.5.1), зависит от выбора матрицы плана. Разумное планирование позволяет уменьшить, а иногда и полностью исключить смещение.

§ 6. Случай с ограничениями на параметры

Предположим, что для схемы, задаваемой моделью (2.1.5), выполняются некоторые равенства на параметры

$$\mathbf{T\Theta} = \mathbf{0}. \tag{2.6.1}$$

Будем оценивать параметрические функции $\mathbf{P}^T\mathbf{\Theta}$ такие, что $\mathbf{P}^T$ не представимо в виде линейной комбинации строк $\mathbf{T}$. Этот случай может быть сведен к описанному выше техникой, называемой редуцированием и изложенной в §4 этой главы. Действительно, исходный вектор $\mathbf{\Theta}$ из k параметров можно заменить вектором $\mathbf{\Theta}_n$ с меньшим числом $k-q$ параметров с помощью выражения (2.4.2.). При этом получим схему, задаваемую редуцированной моделью (2.4.3).

Пусть $\mathrm{Rg}(\mathbf{XQ}) = k - q$. Тогда несмещенная оценка $\widehat{\mathbf{\Theta}}_n$ вектора параметров $\mathbf{\Theta}_n$ может быть найдена из этой схемы по методу наименьших квадратов. Оценка $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ находится следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{Q}\widehat{\mathbf{\Theta}}_n.$$

Эта оценка может быть найдена также путем минимизации выражения $(\mathbf{y} - \mathbf{X\Theta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X\Theta})$ при ограничениях на параметры (2.6.1). Поэтому $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ называется м.н.к.-оценкой вектора параметров $\mathbf{\Theta}$ при ограничении (2.6.1).

Аналогично предыдущему (с заменой k на $k-q$) можно говорить о м.н.к.-оценках параметрических функций или о м.н.к.-оценке параметрического вектора $\mathbf{T\Theta}_n$, строить ковариационную матрицу вектора м.н.к.-оценок $\widehat{\mathbf{\Theta}}_n$, ковариационную матрицу м.н.к.-оценки $\mathbf{T}\widehat{\mathbf{\Theta}}_n$, оценивать σ^2 и производить проверку гипотез.

Таким образом, в теоретическом отношении никаких дополнительных трудностей при введении ограничений (2.6.1) не возникает.

Все вычисления можно проводить также без введения новых параметров. Техника этих вычислений описана в книге C.R.Rao [1].

Более подробные сведения по рассмотренным в этой главе вопросам можно также получить из книг [2, 3].

Литература

1. Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. New York: Wiley.C.P.Pao.

2. Scheffé, H. (1959). *The analysis of variance. Oxford, England*: Wiley.

3. Draper, N.R. and Smith, H. (1973). *Applied Regression Analysis*. New York, London, Sydney: Wiley.

Глава 3. Факторные модели и планы

§ 1. Факторный план

Рассмотрим N наблюдений $y_1, \dots, y_N$ и m переменных $X_i (i = 1, \dots, m)$, принимающих в u-м опыте $(u = 1, \dots, N)$ значения X_{iu}. Будем предполагать, что математическое ожидание наблюдения y_u связано с X_{iu}, известной с точностью до параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$ зависимостью

$$Ey_u = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{f}(X_{1u}, \dots, X_{mu}),$$

где $\mathbf{\Theta}^T = (\theta_1, \dots, \theta_k) -$ вектор неизвестных параметров; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^T$ $-$ вектор известных функций.

Если для данной переменной X_i все X_{iu} рассматриваются как некоторые числа, будем называть переменную X_i количественной. В случае, когда хотя бы одно из значений X_{iu} рассматривается как символ (быть может, записанный в виде числа), будем называть переменную X_i качественной. Данное определение качественных и количественных переменных нельзя признать строгим. Его скорее можно рассматривать как пояснение того, в каких случаях далее будут записываться модели для качественных переменных или модели для количественных переменных. Строгий способ введения этих понятий заключается в следующем: считать качественными переменными те, для которых рассматривается модель для качественных переменных и считать количественными переменными те, для которых рассматривается модель для количественных переменных.

Каждое из различных значений, которые принимает переменная X_i в матрице плана (или просто плане) $\mathbf{D}_X = \{X_{iu}\}$ $(i = 1, \dots, m;\ u = 1, \dots, N)$, назовем уровнем. Общее число различных уровней переменной X_i обозначим через s_i. Каждому из различных уровней переменной X_i поставим в соответствие символы $0,1, \dots, s_i - 1$, независимо от того, является ли переменная количественной или качественной. В этом случае будем говорить о факторе F_i (качественном или количественном), принимающем значения (поддерживающегося на уровнях) $0,1, \dots, s_i - 1$. Тогда матрица плана может быть переписана в следующем виде:

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{matrix} F_{11} & \dots & F_{m1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ F_{1N} & \dots & F_{mN} \end{matrix} \right\|,$$

где столбцы соответствуют факторам, а строки – опытам плана **D**; F_{iu} значение, которое принимает фактор F_i в u-ом опыте.

План, состоящий из N опытов и включающий факторы $F_1, \dots, F_m$, имеющие $s_1, \dots, s_m$ уровней соответственно, будем обозначать через $s_1 \times \dots \times s_m // N$ (или просто $s_1 \times \dots \times s_m$).

Очевидно, что максимальное число различных опытов (строк в матрице плана) равно $s_1 \dots s_m$.

Определение 3.1.1. План $s_1 \times \dots \times s_m // N$, состоящий из $N = s_1 \dots s_m$ различных опытов, называется полным планом. План, который не содержит хотя бы одну из $s_1 \dots s_m$ комбинаций, называется дробным планом.

Вообще говоря, не будем предполагать, что план не содержит совпадающих опытов.

Определение 3.1.2. План называется симметричным, если все факторы имеют одинаковое число уровней. План называется равномерным, если уровни любого фактора встречаются в плане одинаковое для данного фактора число раз.

План будем называть факторным в случае определенного типа модели, для которой данный план рассматривается [1]. Виды факторных моделей будут перечислены ниже.

§ 2. Факторная модель для количественных факторов

Будем считать, что в плане **D** все m факторов $F_1, \dots, F_m$ (с числами уровней $s_1, \dots, s_m$ соответственно) – количественные. Рассмотрим тогда следующую модель:

$$\begin{gathered} Ey(X_1, \dots, X_m) \\ = b_0 + b_1^{(1)} f_1^{(1)}(X_1) + \ \dots \ + b_1^{(s_i-1)} f_1^{(s_i-1)}(X_1) \\ + b_m^{(1)} f_m^{(1)}(X_m) + \ \dots \ + b_m^{(s_m-1)} f_m^{(s_m-1)}(X_m) + \Pi. \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

В модели (3.2.1) приняты следующие обозначения и допущения. $y(X_1, \dots, X_m) -$ наблюдение в точке $(X_1, \dots, X_m)$. П содержит члены с произведениями $k_{i_1 \dots i_r}^{(q_1 \dots q_r)} f_{i_1}^{(q_1)}(X_{i_1}) \ \dots \ f_{i_r}^{(q_r)}(X_{i_r})$ ($k_{i_1 \dots i_r}^{(q_1 \dots q_r)}$ – константы, $i_1 \neq \dots \neq i_r$). Система функций $1, f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ линейно независима в точках $X_{i1}, \dots, X_{iN}$. То есть, $\operatorname{Rg} \mathbf{G}_i = s_i$ для любого $i = 1, \dots, m,$ где

$$\mathbf{G}_i = \left\| \begin{matrix} 1 & f_i^{(1)}(X_{i1}) & \dots & f_i^{(s_i-1)}(X_{i1}) \\ 1 & f_i^{(1)}(X_{i2}) & \dots & f_i^{(s_i-1)}(X_{i2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_i^{(1)}(X_{iN}) & \dots & f_i^{(s_i-1)}(X_{iN}) \end{matrix} \right\|. \tag{3.2.2}$$

Функции $f_i^{(q)}(X_i)$ могут быть полиномами q-й степени от X_i. В частности, для каждого i система функций $f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ может быть чебышевской системой ортогональных полиномов в точках $X_{i1}, \dots, X_{iN}$. В этом случае столбцы матрицы $\mathbf{G}_i$ будут попарно ортогональны. Будем называть тогда соответствующую модель чебышевской.

Определение 3.2.1. Если П содержит всевозможные члены с произведениями $k_{i_1\dots i_r}^{(q_1\dots q_r)} f_{i_1}^{(q_1)}(X_{i1}) \dots f_{i_r}^{(q_r)}(X_{i_r})$ $(i_1 \neq \dots \neq i_r)$, будем называть модель (3.2.1) полной факторной моделью для количественных факторов (или A^f-моделью) для факторного плана **D**.

Матрица коэффициентов для A^f-модели (3.2.1) будет иметь вид

$$\mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} 1 & f_1^{(1)}(X_{11}) & \dots & f_m^{(s_m-1)}(X_{m1}) & \dots \\ 1 & f_1^{(1)}(X_{12}) & \dots & f_m^{(s_m-1)}(X_{m2}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 1 & f_1^{(1)}(X_{1N}) & \dots & f_m^{(s_m-1)}(X_{mN}) & \dots \end{matrix} \right\|. \tag{3.2.3}$$

Определение 3.2.2. Множество факторов $F_1, \dots, F_m$, пар факторов $F_{i_1}F_{i_2}$ $(i_1 \neq i_2)$, троек факторов $F_{j_1}F_{j_2}F_{j_3}$ $(j_1 \neq j_2 \neq j_3)$ и т. д. назовем факторным множеством Ω при выполнении следующего условия: если $F_{n_1} \ \dots \ F_{n_r} \in \Omega$, то и $F_{l_1} \ \dots \ F_{l_v} \in \Omega$ для всех $v = 1, \dots, r-1$ и $l_1, \dots, l_v = n_1, \dots, n_r$, $l_1 \neq \dots \neq l_v$.

Пример 3.2.1. Для $m = 4$ элементы $F_1, F_2, F_3, F_4, F_1F_2, F_1F_4, F_1F_2F_4$ не образуют факторного множества Ω. Действительно, поскольку $F_1F_2F_4 \in \Omega$, то необходимо, чтобы $F_1F_2 \in \Omega$, $F_1F_4 \in \Omega$ и $F_2F_4 \in \Omega$. Однако последнее соотношение не выполняется. При добавлении элемента F_2F_4 получим, очевидно, факторное множество.

Определение 3.2.3. Модель для факторного плана **D**

$$\begin{aligned} &Ey(X_1, \dots, X_m) = \\ &b_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{m} \left[b_i^{(1)} f_i^{(1)}(X_i) + \ \dots \ + b_i^{(s_i-1)} f_i^{(s_i-1)}(X_i) \right] \\ &+ \textstyle\sum_{i_1 i_2} \left[b_{i_1 i_2}^{1,1} k_{i_1 i_2}^{1,1} f_{i_1}^{(1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(1)}(X_{i_2}) + \cdots \right. \\ &\left. + b_{i_1 i_2}^{s_{i_1}-1, s_{i_2}-1} k_{i_1 i_2}^{s_{i_1}-1, s_{i_2}-1} f_{i_1}^{(s_{i_1}-1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(s_{i_2}-1)}(X_{i_2}) \right] + \cdots \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

будем называть факторной моделью для количественных факторов для факторного множества Ω (или A^{Ω}-моделью) при выполнении следующего условия: если модель (3.2.4) содержит член с произведением $k_{i_1 \dots i_r}^{q_1 \dots q_r} f_{i_1}^{(q_1)}(X_{i_1}) \ \dots \ f_{i_r}^{(q_r)}(X_{i_r})$ для некоторого набора $q_1, \dots, q_r$, то она содержит все возможные произведения для всех $q_1 = 0, \dots, s_1 - 1, \dots, q_r = 0, \dots, s_r - 1$ (полагаем $f_i^{(0)}(X_i) = 1$).

Очевидно, что определение 3.2.3 согласуется с определением 3.2.2.

A^{Ω}-модель (3.2.4) будем считать общей моделью для количественных факторов. A^f-модель, например, является частным случаем A^{Ω}-модели.

§ 3. Главные эффекты и эффекты взаимодействия

В N-мерном евклидовом пространстве E_N u-й координате каждого вектора поставим в соответствие u-й опыт плана **D.**

Определение 3.3.1. Контрастом будем называть такой ненулевой вектор $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = (z_1, \dots, z_N) \in E_N$, что

$$\sum_{u=1}^{N} z_u = 0. \tag{3.3.1}$$

Определение 3.3.2. Вектором главного эффекта фактора F_i плана **D** называется контраст с равными элементами для наблюдений, в которых фактор F_i в плане **D** принимает одинаковые значения. Этот вектор называется также вектором эффекта взаимодействия нулевого порядка фактора F_i плана **D**.

После того как введено понятие вектора эффекта взаимодействия $(r-2)$-го порядка $(r \geq 2)$, вектор эффекта взаимодействия $(r-1)$-го порядка вводится следующим образом.

Определение 3.3.3. Вектором эффекта взаимодействия $(r-1)$-го порядка или вектором r-факторного эффекта взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$ плана **D** называется ортогональный ко всем векторам эффектов взаимодействия вплоть до порядка $(r-2)$ факторов $F_1, \dots, F_r$ плана **D** контраст с равными элементами для всех наблюдений плана **D** с одинаковыми комбинациями уровней факторов $F_1, \dots, F_r$.

В определенных понятиях будем иногда опускать слово «вектор».

Линейная комбинация нескольких эффектов взаимодействия $(r-1)$-го порядка $(r \geq 1)$ r факторов есть, очевидно, эффект взаимодействия $(r-1)$-го порядка тех же факторов либо нулевой вектор. Поэтому совокупность всех эффектов взаимодействия $(r-1)$-го порядка r факторов вместе с нулевым вектором есть линейное подпространство пространства E_N.

Определение 3.3.4. Числом степеней свободы эффектов взаимодействия $(r-1)$-го порядка r факторов для плана **D** называется размерность соответствующего им линейного подпространства.

Очевидно, что число степеней свободы главных эффектов фактора F_i для любого плана равно $s_i - 1$.

Требование ортогональности эффектов взаимодействия факторов $(r-1)$-го порядка ко всем эффектам взаимодействия вплоть до порядка

$r-2$ этих же факторов, очевидно, эквивалентно требованию ортогональности к максимальным линейно независимым системам соответствующих эффектов взаимодействия.

Определение 3.3.5. Матрицу $\mathbf{F}_i$, состоящую из максимальной независимой системы из s_i-1 векторов главных эффектов фактора F_i, назовем матрицей главных эффектов фактора F_i. Матрицу $\mathbf{F}_{ij}$, состоящую из максимальной независимой системы векторов эффектов взаимодействия факторов F_i и F_j назовем матрицей эффектов взаимодействия факторов F_i и F_j и т. д.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{\Phi}_{1\ldots r} = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_r, \mathbf{F}_{12}, \ldots, \mathbf{F}_{1\ldots r} \ \|,$$

где $\mathbf{I}$ —вектор из 1.

Далее будем считать, что любая матрица, входящая в $\mathbf{\Phi}_{1\ldots r}$, нормирована таким образом, что сумма квадратов элементов любого ее столбца равна *N.* В матрице $\mathbf{F}_i$ от каждого подмножества одинаковых строк оставим только по одной строке и добавим слева столбец из единиц. Полученную матрицу обозначим через $\bar{\mathbf{\Phi}}_i$.

Матрицы $\mathbf{F}_i$ можно использовать в качестве матриц $\mathbf{G}_i$ (3.2.2) для A^f-модели (3.2.1), так как

$$\mathrm{Rg} \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_i \ \| = \mathrm{Rg}\, \bar{\mathbf{\Phi}}_i = s_i.$$

Пример 3.3.1. Рассмотрим матрицу полного плана 3×2 для факторов F_1 и F_2

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} F_1 & F_2 \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Число степеней свободы главных эффектов фактора F_2 равно 1, и все эти главные эффекты с точностью до множителя совпадают с главным эффектом $(-1,-1,-1,+1,+1,+1)^T$. Число степеней свободы главных эффектов фактора F_1 равно 2. Таким образом, существуют два линейно независимых вектора главных эффектов фактора F_1, образующих матрицу $\mathbf{F}_1$ главных эффектов. Эта матрица может иметь следующий вид (здесь и далее будем записывать матрицы в целых числах и ставить нормирующие множители под соответствующими столбцами):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Vmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -2 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \\ 0 & -2 \\ +1 & +1 \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} \end{Vmatrix}^T.$$

Любая нетривиальная комбинация столбцов $\mathbf{F}_1$ дает вектор главного эффекта фактора F_1. Таким вектором, например, будет их полусумма $(0, -1, +1, 0, -1, +1)^{\mathrm{T}}$.

Легко проверить, что матрица

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{Vmatrix} +1 & -1 \\ 0 & +2 \\ -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ 0 & -2 \\ +1 & +1 \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} \end{Vmatrix}^T.$$

может служить матрицей эффектов взаимодействия факторов F_1 и F_2. Действительно, оба вектора матрицы $\mathbf{F}_{12}$ ортогональны единичному вектору и векторам матриц $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Поскольку единичный вектор и векторы матриц $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ортогональны, $\mathbf{F}_{12}$ содержит максимально возможное число векторов. Таким образом, матрица $\mathbf{\Phi}_{12}$ в данном случае имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_{12} = \begin{Vmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & -2 & -1 & 0 & +2 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -2 & +1 & 0 & -2 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} \end{Vmatrix}^T.$$

§ 4. Основная теорема для полного плана

Определение 3.4.1. Для двух векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$ введем операцию $\otimes$, которую будем называть произведением, так, что

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{c} = (a_1 c_1, \dots, a_N c_N)^T.$$

Пусть столбцы матрицы $\mathbf{A}$ размера $N \times n$ есть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, а столбцы матрицы $\mathbf{C}$ размера $N \times l$ есть $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_l$. Тогда определим

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{C} = \|(\mathbf{a}_1 \otimes \boldsymbol{c}_1), (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{c}_2), \dots, (\mathbf{a}_n \otimes \mathbf{c}_l)\|.$$

Теорема 3.4.1. Для полного плана любой эффект взаимодействия одного множества факторов ортогонален любому эффекту взаимодействия другого множества факторов, и число столбцов матрицы $\mathbf{F}_{i_1 \dots i_r}$ равно $(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_r} - 1)$.

Доказательство. Рассмотрим любые две строки матрицы полного плана $\mathbf{D}^f$. Легко показать, что для этих двух строк найдется столбец, отвечающий какому-либо фактору, такой, что на пересечении его с выбранными строками стоят различные уровни. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваются первые две строки и последний столбец. Выберем столбцы в матрицах $\mathbf{F}_i = \{F_i^{pq}\}$ так, чтобы они были ортогональны. Очевидно, что в полном плане все уровни данного фактора появляются одинаковое число раз. Поэтому будут ортогональны столбцы и, следовательно, строки матриц $\overline{\mathbf{\Phi}}_i = \{\overline{\Phi}_i^{jl}\}$, а также для любых j и l

$$\textstyle\sum_j \left(\overline{\Phi}_i^{jl}\right)^2 = \sum_l \left(\overline{\Phi}_i^{jl}\right)^2. \tag{3.4.1}$$

Из (3.4.1) следует, что для любого p

$$\textstyle\sum_q F_i^{pq} = const. \tag{3.4.2}$$

Положим $\mathbf{R}_1 = \|\mathbf{I}, \ \mathbf{F}_1\|$. Количество столбцов матрицы $\mathbf{R}_1$ равно

$$\lambda_{R_1} = s_1. \tag{3.4.3}$$

Для определения $\mathbf{R}_i (i = 2, \dots, m)$ запишем рекуррентное соотношение

$$\mathbf{R}_i = \|\mathbf{R}_{i-1}, (\mathbf{R}_{i-1} \otimes \mathbf{F}_i)\|.$$

Количество столбцов λ_{R_i} матрицы $\mathbf{R}_i$ связано с количеством столбцов $\lambda_{R_{i-1}}$ матрицы $\mathbf{R}_{i-1}$ следующим очевидным соотношением:

$$\lambda_{R_i} = \lambda_{R_{i-1}} s_i. \tag{3.4.4}$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{R}_m = \|\mathbf{R}_{m-1}, (\mathbf{R}_{m-1} \otimes \mathbf{F}_m)\|$. Вследствие равенств (3.4.3) и (3.4.4) количество столбцов λ_{R_m} матрицы $\mathbf{R}_m$ равно $\lambda_{R_m} = s_1 \dots s_m = N$. Таким образом, $\mathbf{R}_m$ – квадратная матрица.

Докажем ортогональность выбранных двух первых строк матрицы $\mathbf{R}_m$. Пусть первые две строки матрицы $\mathbf{R}_{m-1}$ будут $\mathbf{a}^T$ и $\mathbf{c}^T$. Тогда первые две строки матрицы $\mathbf{R}_m$ есть

$$(\mathbf{a}\overline{\Phi}_m^{11})^T \dots \left(\mathbf{a}\overline{\Phi}_m^{1s_m}\right)^T \text{ и } (\mathbf{c}\overline{\Phi}_m^{21})^T \dots \left(\mathbf{c}\overline{\Phi}_m^{2s_m}\right)^T.$$

Их скалярное произведение

$(\mathbf{a},\mathbf{c})\ \sum_{j=1}^{s_m} \bar{\Phi}_m^{1j} \bar{\Phi}_m^{2j} = 0.$

Следовательно, любые две строки $\mathbf{R}_m$ ортогональны.

Теперь для доказательства ортогональности любой пары столбцов матрицы $\mathbf{R}_m$ нужно доказать, что сумма квадратов элементов любой строки $\mathbf{R}_m$ постоянна:

$$\sum_{l=1}^{s_1 \dots s_m} r_m^{jl} = const, \tag{3.4.5}$$

где r_i^{jl} – элемент, стоящий на пересечении j-й строки и l-го столбца матрицы $\mathbf{R}_i$.

По построению $\mathbf{R}_i$,

$$\sum_{l=1}^{s_1 \dots s_i} r_i^{jl} = \sum_{l=1}^{s_1 \dots s_i} \left(r_{i-1}^{jl}\right)^2 \sum_{n=1}^{s_i} \left(F_i^{jn}\right)^2,$$
$$\sum_{l=1}^{s_1} \left(r_i^{jl}\right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{s_1 - 1} \left(F_1^{jn}\right)^2.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{s_1 \dots s_m} \left(r_m^{jl}\right)^2 = \prod_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{s_i} \left(F_i^{jn}\right)^2 + \prod_{i=2}^{m} \sum_{n=1}^{s_i} \left(F_i^{jn}\right)^2.$$

Откуда с учетом равенств (3.4.2) получим соотношение (3.4.5).

Матрицы вида $\mathbf{F}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_{i_r}$, входящие в $\mathbf{R}_m$, содержат $(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_r} - 1)$ столбцов. Элементы каждого из этих столбцов равны для всех наблюдений плана $\mathbf{D}_f$ с одинаковыми комбинациями уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$. По доказанному, каждый из этих столбцов ортогонален остальным столбцам. Следовательно, по индукции можно легко доказать, что эти столбцы есть эффекты взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$.

Число различных комбинаций уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$ равно $s_{i_1} \dots s_{i_m}$. Все векторы главных эффектов и эффектов взаимодействия этих факторов лежат в подпространстве E_l размерности $l = (s_1 \dots s_m - 1)$ пространства E_N, поскольку одинаковым комбинациям уровней факторов отвечают равные элементы любого вектора главных эффектов или эффекта взаимодействия и все векторы этих эффектов должны быть ортогональны единичному вектору.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{m} (s_i - 1) + \sum_{i \neq j} (s_i - 1)(s_j - 1)$$
$$+ \dots + (s_1 - 1) \dots (s_m - 1) = s_1 \dots s_m - 1,$$

число линейно независимых r-факторных эффектов взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ не может превышать

$$(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_r} - 1) \tag{3.4.6}$$

и поэтому равно (3.4.6).

Используя матрицы $\mathbf{F}_i$ с попарно ортогональными столбцами, можно получить ортогональные множества эффектов взаимодействия. Легко показать также, что можно получить линейно независимые эффекты взаимодействия, используя линейно независимые (не обязательно попарно ортогональные) главные эффекты соответствующих факторов, составляющие матрицу $\mathbf{F}'_r$. Для этого докажем лемму.

Лемма 3.4.1. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{C}$ – матрицы размера $N \times p$, $N \times p$ и $N \times q$ соответственно. И пусть

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'\boldsymbol{\Lambda}, \tag{3.4.7}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ – невырожденная квадратная матрица порядка p. Тогда матрицы $\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$ и $\mathbf{A}' \otimes \mathbf{C}$ связаны невырожденным линейным преобразованием.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{c}_i$ – i-й столбец матрицы $\mathbf{C}$. Тогда вследствие (3.4.7)

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{c}_i = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Lambda}) \otimes \mathbf{c}_i = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{c}_i)\boldsymbol{\Lambda}.$$

Таким образом, для любого i $(i = 1, \dots, q)$ матрицы $\mathbf{A} \otimes \mathbf{c}_i$ и $\mathbf{A}' \otimes \mathbf{c}_i$ связаны невырожденным линейным преобразованием. Отсюда следует утверждение леммы.

$\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{F}'_i$ для любого i связаны невырожденным линейным преобразованием. Поэтому, применяя многократно лемму 3.4.1, получим, что $\mathbf{F}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_{i_r}$ связана невырожденным преобразованием с $\mathbf{F}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}'_{i_r}$. Следовательно, $\mathbf{F}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}'_{i_r}$ состоит из линейно независимых эффектов взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$.

Таким образом, теорема 3.4.1 доказана.

Определение 3.4.2. Множество линейно независимых эффектов взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ будем называть полным, если число этих эффектов во множестве определяется выражением (3.4.6).

Замечание 1 к теореме 3.4.1. Доказательство теоремы 3.4.1 по существу дает способ построения для $\mathbf{D}^f$ эффектов взаимодействия некоторых факторов как произведение главных эффектов этих факторов. При этом будем получать полное множество ортогональных эффектов взаимодействия при использовании полного множества ортогональных главных эффектов и полное множество линейно независимых эффектов взаимодействия при использовании полного множества линейно независимых главных эффектов.

Замечание 2 к теореме 3.4.1. Если для любого $i = 1, \dots, m$ функции $f_i^{(q)}(X_i)$ в A^f-модели (3.2.1) выбраны таким образом, что

$$\sum_{u=1}^{N} f_i^{(q)}(X_{iu}) = 0,$$

то все столбцы матрицы (3.2.2), кроме первого, будут представлять собой векторы главных эффектов фактора F_i. Если, кроме того,

$$\sum_{u=1}^{N}\left\{f_i^{(q)}\left(X_{i_u}\right)\right\}^2 = N,$$

то из доказательства теоремы 3.4.1 следует, что скалярный квадрат любого столбца $\mathbf{F}_{i_1} \otimes \ \ldots \ \otimes \mathbf{F}_{i_r}$ равен N. Поэтому по теореме 3.4.1 и замечанию 1 к ней матрица коэффициентов (3.2.3) для полной факторной модели будет представлять собой матрицу $\mathbf{\Phi}_{1\ \ldots\ m}$ главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_1, \ldots, F_m$ для плана $\mathbf{D}^f$.

Пример 3.4.1. Рассмотрим матрицу $\mathbf{D}^f$ полного плана 3^2 и соответствующую ему матрицу $\mathbf{\Phi}_{12}$:

$$\mathbf{D}^f = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} \right\| \end{array}, \quad \mathbf{\Phi}_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \qquad \mathbf{F}_1 & \qquad\qquad \mathbf{F}_2 & \qquad\qquad \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|cc|cc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & 3/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array} \right\|^T$$

Поскольку каждый из факторов F_1 и F_2 – трехуровневый, имеется ровно по два линейно независимых главных эффекта этих факторов. Каждый из столбцов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ортогонален к $\mathbf{I}$ и для одинаковых уровней факторов F_1 и F_2 соответственно принимает одинаковые значения. Таким образом, два столбца матрицы $\mathbf{F}_1$ и два столбца матрицы $\mathbf{F}_2$ являются главными эффектами факторов F_1 и F_2 соответственно. Внутри каждой из матриц $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ столбцы выбраны ортогональными. Поэтому произведение матриц $\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_2$ по замечанию 1 к теореме 3.4.1 дает четыре ортогональных вектора эффектов взаимодействия факторов F_1 и F_2. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выполняются все требования, записанные в определении эффектов взаимодействия. Более того, по теореме 3.4.1 все столбцы $\mathbf{\Phi}_{12}$ попарно ортогональны.

§ 5. Модель истинных эффектов для количественных факторов

Далее будем рассматривать чебышевскую модель только для тех случаев, когда структура плана $\mathbf{D}$ приводит к ортогональности всех эффектов. В противном случае мы будем использовать модель, которую назовем моделью истинных эффектов для количественных факторов.

Запишем для этого полный план $\mathbf{D}^f$ с числом опытов N^f для факторов, входящих в $\mathbf{D}$. Определим вектор истинных значений $\boldsymbol{\eta}^f$ для $\mathbf{D}^f$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta}^f = E\mathbf{y}^f = E\left(y_1, \dots, y_{N^f}\right)^T.$$

Определим также вектор истинных эффектов $\mathbf{B}$ для количественных факторов. Пусть для $\mathbf{D}^f$

$$\boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m} = \left\|\mathbf{I}, \mathbf{F}^f_1, \dots, \mathbf{F}^f_m,\ \mathbf{F}^f_{12}, \dots, \mathbf{F}^f_{1\dots m}\right\|, \tag{3.5.1}$$

где все матрицы $\mathbf{F}^f$ имеют ортогональные столбцы (скалярные квадраты столбцов $\boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m}$, как и ранее, равны N^f). Тогда полагаем

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N^f}\boldsymbol{\Phi}^{f^T}_{1\ \dots\ m}\boldsymbol{\eta}^f. \tag{3.5.2}$$

Очевидно, что

$$\boldsymbol{\eta}^f = \boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m}\mathbf{B}, \tag{3.5.3}$$

так как из соотношения (3.5.2) и теоремы 3.4.1 следует, что

$$\boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m}\mathbf{B} = \frac{1}{N^f}\boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m}\boldsymbol{\Phi}^{f^T}_{1\dots m}\boldsymbol{\eta}^f = \boldsymbol{\eta}^f.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.5.1. Для вектора наблюдений $\mathbf{y}^f = \left(y_1, \dots, y_{N^f}\right)$ в точках $\mathbf{D}^f$ для факторов $F_1, \dots, F_m$

$$E\mathbf{y}^f = \boldsymbol{\Phi}^f_{1\dots m}\mathbf{B}, \tag{3.5.4}$$

где $\mathbf{B}$ – вектор истинных эффектов, задаваемый формулой (3.5.2).

Из определения матрицы главных эффектов и замечания 2 к теореме 3.4.1 вытекает, что модель (3.5.3) или (3.5.4) – частный случай A^f-модели и, следовательно, общей факторной A^Ω-модели для количественных факторов. Назовем модель (3.5.4) A^f-моделью истинных эффектов.

Обозначим через $\boldsymbol{\Phi}^\Omega$ и $\mathbf{B}^\Omega$ части, отвечающие факторному множеству Ω, матрицы $\boldsymbol{\Phi}^f_{1\ \dots\ m}$ и вектора $\mathbf{B}$ соответственно. Если предположить, что элементы вектора $\mathbf{B}$, не отвечающие факторному множеству Ω, равны нулю, то тождество (3.5.4) перепишется следующим образом:

$$E\mathbf{y}^f = \boldsymbol{\Phi}^\Omega\mathbf{B}^\Omega. \tag{3.5.5}$$

Очевидно, что модель (3.5.5) – также частный случай факторной A^Ω-модели. Назовем модель (3.5.5) A^Ω-моделью истинных эффектов. Будем иногда опускать слова «истинных эффектов», если из текста ясно или безразлично, о каком типе модели для количественных факторов идет речь.

A^Ω-модель (3.5.5) можно доопределить в более широкой области. В этом случае придем к модели

$$Ey(X_1, \dots, X_m) = \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\mathbf{B}^{\Omega}, \tag{3.5.6}$$

где $f^T(X_{1u}, \dots, X_{mu})$ совпадает с u-й строкой матрицы $\mathbf{\Phi}^{\Omega}$.

Коэффициенты модели (3.5.6) допускают удобную интерпретацию. О ней будем говорить после рассмотрения следующего примера.

Пример 3.5.1. Рассмотрим план $\mathbf{D}$ и соответствующий вектор математических ожиданий наблюдений $\boldsymbol{\eta}$:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}; \quad \mathbf{D}_X = \begin{Vmatrix} X_1^{(1)} & X_2^{(0)} & X_3^{(0)} \\ X_1^{(0)} & X_2^{(1)} & X_3^{(0)} \\ X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & X_3^{(1)} \\ X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & X_3^{(0)} \\ X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & X_3^{(1)} \end{Vmatrix};$$

$$E\mathbf{y} = \eta = \begin{Vmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_5 \\ \eta_1 \\ \eta_8 \end{Vmatrix}.$$

В этом случае полный план $\mathbf{D}^f$ и соответствующий вектор $\boldsymbol{\eta}^f$ математических ожиданий наблюдений запишутся так:

$$\mathbf{D}^f = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad E\mathbf{y}^f = \boldsymbol{\eta}^f = (\eta_1, \dots, \eta_8)^T.$$

Для $\mathbf{D}^f$ матрица $\mathbf{\Phi}_{123}^f$ может быть записана, например, следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}_{123}^f = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда вектор истинных эффектов

$$\mathbf{B} = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123})^T = \frac{1}{8}\mathbf{\Phi}_{123}^{f^T}\boldsymbol{\eta}^f, \qquad (3.5.7)$$

и справедлива A^f-модель истинных эффектов (3.5.4) в точках $\mathbf{D}^f$. Для доопределения ее в более широкой области положим

$$f_i^{(1)}(X_i) = x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\Delta X_i} \quad (i = 1,2,3),$$

где

$$\bar{X}_i = \frac{X_i^{(1)} + X_i^{(0)}}{2} \text{ и } \Delta X_i = \frac{X_i^{(1)} - X_i^{(0)}}{2}.$$

Очевидно, что x_i будет в точках $\mathbf{D}^f$ принимать значения, совпадающие с элементами векторов $\mathbf{F}_i$. Значения x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_2x_3$, принимаемые в точках $\mathbf{D}^f$, будут совпадать с элементами векторов $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{13}, \mathbf{F}_{23}, \mathbf{F}_{123}$ соответственно. В таком случае придем к расширенной A^f-модели истинных эффектов

$$\begin{aligned} Ey &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ &+ b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \end{aligned} \qquad (3.5.8)$$

В предположениях, например, о том, что $b_{13} = b_{23} = b_{123} = 0$, получим следующую A^Ω-модель истинных эффектов:

$$Ey = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2. \qquad (3.5.9)$$

Матрица коэффициентов $\mathbf{X}^\Omega$ плана $\mathbf{D}$ для модели (3.5.9) будет иметь вид

$$\mathbf{X}^\Omega = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Коэффициенты модели (3.5.8), то есть элементы вектора истинных эффектов (или просто истинные эффекты) допускают наглядную интерпретацию. Так, из соотношения (3.5.7) получим, например, что

$$b_0 = \frac{1}{8}\sum_{u=1}^{8}\eta_u$$

есть среднее по всем значениям $\eta_u = Ey_u$. Удвоенный коэффициент

$$2b_3 = \frac{1}{4}\sum_{u=5}^{8}\eta_u - \frac{1}{4}\sum_{u=1}^{4}\eta_u$$

показывает, каково «влияние» фактора F_3, а именно, насколько среднее математических ожиданий наблюдений для точек, в которых фактор F_3

принимает одно значение, больше среднего математических ожиданий наблюдений для точек, в которых фактор F_3 принимает другое значение. Число

$$4b_{12} = \left\{\frac{\eta_1 + \eta_5}{2} - \frac{\eta_2 + \eta_6}{2}\right\} - \left\{\frac{\eta_3 + \eta_7}{2} - \frac{\eta_4 + \eta_8}{2}\right\}$$

показывает, насколько больше «влияние» фактора F_1 при одном значении фактора F_2, чем «влияние» фактора F_1 при другом значении фактора F_2.

§ 6. Теорема о полном ранге

Следующие три параграфа посвящены выводу условия, при котором возможно построение ортогонального плана [2].

Пусть в плане **D** число различных комбинаций уровней факторов $F_1, \dots, F_r$

$$C^{1\dots r} = s_1 \dots s_r. \tag{3.6.1}$$

Теорема 3.6.1. I. Условие (3.6.1) необходимо и достаточно для того, чтобы число степеней свободы любых n-факторных эффектов взаимодействия $(n \leq r)$ n факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ из $F_1, \dots, F_r$ определялось выражением (3.4.6). II. При выполнении условия (3.6.1) $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ – матрица полного ранга.

Доказательство. Необходимость условия (3.6.1) очевидна. Докажем достаточность условия (3.6.1) и справедливость п. II теоремы.

По условию теоремы в план **D** входит подмножество $\mathbf{D}^f$, образующее полный план для факторов $F_1, \dots, F_r$. Для плана $\mathbf{D}^f$ построим матрицы эффектов вплоть до порядка $(r-1)$ факторов $F_1, \dots, F_r$ и составим матрицу

$$\mathbf{\Phi}^f_{1\dots r} = \left\|\mathbf{I}, \mathbf{F}^f_1, \dots, \mathbf{F}^f_r, \mathbf{F}^f_{12}, \dots, \mathbf{F}^f_{1\dots r}\right\|.$$

Из теоремы 3.4.1 следует, что для $\mathbf{D}^f$ любой эффект взаимодействия данного множества факторов ортогонален любому эффекту взаимодействия другого множества факторов. Следовательно, все столбцы матрицы $\mathbf{\Phi}^f_{1\dots r}$, взятые по одному от каждой матрицы эффектов, попарно ортогональны. Поэтому $\mathbf{\Phi}^f_{1\dots r}$ – матрица полного ранга.

Для каждой комбинации уровней факторов $F_1, \dots, F_r$ в плане **D** запишем строку, соответствующую этой комбинации из матрицы $\mathbf{\Phi}^f_{1\dots r}$. Полученную при этом матрицу обозначим через

$$\mathbf{\Phi}^{\mathbf{D}}_{1\dots r} = \left\|\mathbf{I}, \mathbf{F}^{\mathbf{D}}_1, \dots, \mathbf{F}^{\mathbf{D}}_r, \mathbf{F}^{\mathbf{D}}_{12}, \dots, \mathbf{F}^{\mathbf{D}}_{1\dots r}\right\|,$$

где число столбцов матрицы $\mathbf{F}^{\mathbf{D}}_{i_1\dots i_n}$ равно числу столбцов матрицы $\mathbf{F}^{f}_{i_1\dots i_n}$. Очевидно, что $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{D}}_{1\dots r}$ – также матрица полного ранга.

Будем строить матрицу

$$\mathbf{\Phi}_{1\dots r} = \|\mathbf{I}, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_r, \mathbf{F}_{12}, \dots, \mathbf{F}_{1\dots r}\|,$$

содержащую векторы **I**, главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$ плана **D**. При этом число столбцов матрицы $\mathbf{F}_{i_1\dots i_n}$ будет равно числу столбцов матрицы $\mathbf{F}^{\mathbf{D}}_{i_1\dots i_n}$. Обозначим через $\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n}$ j-е столбцы соответственно $\mathbf{F}_{i_1\dots i_n}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{D}}_{i_1\dots i_n}$. Первый столбец $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ совпадает с первым столбцом $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{D}}_{1\dots r}$. Следующие столбцы будем строить рекуррентно. Пусть построено p независимых первых столбцов $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$, причем l-й столбец $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$, является линейной комбинацией l первых столбцов $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{D}}_{1\dots r}$ $(l = 1, \dots, p)$. И пусть любые из этих столбцов, входящие в матрицу $\mathbf{F}_{j_1\dots j_l}$, есть независимые эффекты взаимодействия факторов $F_{j_1}, \dots, F_{j_l}$. Тогда способ построения $(p+1)$-го столбца заключается в следующем.

Пусть $(p+1)$-й столбец $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ есть $\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$. Тогда запишем матрицу

$$\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n} = \left\| \mathbf{I}, \mathbf{F}_{i_1}, \dots, \mathbf{F}_{i_n}, \mathbf{F}_{i_1 i_2}, \dots, \mathbf{F}_{i_1\dots i_n}, \mathbf{F}^{1}_{i_1\dots i_n}, \dots, \mathbf{F}^{j-1}_{i_1\dots i_n} \right\|$$

и положим

$$\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n} = \mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}\left(\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}\right)^{-1}\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n} - \mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n}.$$

Первые p столбцов матрицы $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ независимы, поэтому $\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}$ невырождена, обратная к ней существует и

$$\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}\left(\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}\right)^{-1}\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n} \neq \mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n},$$

$\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$ – ненулевой столбец. $\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$ есть линейная комбинация столбцов $\mathbf{A}^{j}_{i_1\dots i_n}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{D}j}_{i_1\dots i_n}$, поэтому получим $(p+1)$ независимых столбцов. Элементы $\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$ для одинаковых комбинаций уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ равны между собой. В то же время очевидно, что

$$\mathbf{A}^{jT}_{i_1\dots i_n}\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n} = 0.$$

Поэтому $\mathbf{F}^{j}_{i_1\dots i_n}$ – эффект взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$.

Таким образом, матрица $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ содержит независимые столбцы **I**, главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$.

По теореме 3.4.1 для плана $\mathbf{D}^f$ число степеней свободы главных эффектов фактора F_i и эффектов взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$

равно соответственно $(s_i - 1)$ и $(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_n} - 1)$. Поэтому каждая из матриц $\mathbf{F}_i^f$ и, следовательно, $\mathbf{F}_i$ содержит $s_i - 1$ независимых столбцов; каждая из матриц $\mathbf{F}_{i_1 \dots i_n}^f$ и $\mathbf{F}_{i_1 \dots i_n}$ содержит $(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_n} - 1)$ независимых столбцов. В $\mathbf{F}_i$ находится $s_i - 1$ независимых столбцов, поэтому $\mathbf{F}_i$ содержит максимальную систему независимых главных эффектов фактора F_i для плана $\mathbf{D}$.

Предположим теперь, что $\mathbf{I}$ и столбцы, входящие $\mathbf{F}_1, \ \dots \ , \ \mathbf{F}_r$, составляют систему линейно зависимых векторов. Так как нетривиальная линейная комбинация независимых главных эффектов фактора F_i есть главный эффект фактора F_i, то данное предположение означает, что найдется нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ \dots \ , \ \boldsymbol{\xi}_r$, равная нулю (через $\boldsymbol{\xi}_i$ обозначены векторы главных эффектов). Однако $\boldsymbol{\xi}_i$ могут быть получены как нетривиальные линейные комбинации столбцов из $\mathbf{F}_i$. Отсюда следует, что найдется нетривиальная линейная комбинация $\mathbf{I}$ и столбцов из $\mathbf{F}_1, \ \dots \ , \ \mathbf{F}_r$, равная нулю, что невозможно. Поэтому $\mathbf{I}$ и все столбцы, входящие в $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_r$, линейно независимы. Отсюда с помощью простых алгебраических операций получим, что число степеней свободы эффектов взаимодействия F_i и F_j равно $(s_i - 1)(s_j - 1)$. Поэтому любая матрица эффектов взаимодействия первого порядка в $\boldsymbol{\Phi}_{1 \dots r}$ содержит максимальную систему независимых эффектов взаимодействия первого порядка.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что из максимальности системы линейно независимых векторов, входящих в любую матрицу эффектов взаимодействия $(n-1)$-го порядка из $\boldsymbol{\Phi}_{1 \dots r}$, следует максимальность системы независимых векторов, входящих в любую матрицу эффектов взаимодействия n-го порядка из $\boldsymbol{\Phi}_{1 \dots r}$. Теперь утверждение теоремы становится очевидным.

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{\Phi}_i^{f\mathbf{D}} = \|\mathbf{I}, \ \mathbf{F}_i^{f\mathbf{D}}\|$ и матрицу $\mathbf{G}_i$ (3.2.2). Очевидно, что эти матрицы связаны невырожденным линейным преобразованием. Отсюда следует, что матрицы $\boldsymbol{\Phi}_{1 \dots r}^{f\mathbf{D}} = \|\mathbf{I}, \ \mathbf{F}_1^{f\mathbf{D}}\| \otimes \dots \otimes \|\mathbf{I}, \ \mathbf{F}_r^{f\mathbf{D}}\|$ и $\mathbf{G}_{1 \dots r} = \mathbf{G}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{G}_r$ также связаны невырожденным линейным преобразованием. Таким образом, получаем простое следствие.

Следствие теоремы 3.6.1. При выполнении условия (3.6.1) $\mathbf{G}_{1 \dots r}$ есть матрица полного ранга; матрицы коэффициентов $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ плана $\mathbf{D}$ для двух произвольных A^{Ω}-моделей связаны невырожденным линейным преобразованием.

Рассматривая r-факторные эффекты взаимодействия, будем считать, что выполняется условие (3.6.1).

Вместе с рассмотрением факторного множества Ω как множества факторов и их подмножеств в соответствии с определением 3.2.2 будем также рассматривать факторное множество Ω как множество главных эффектов и эффектов взаимодействия в соответствии со следующим определением.

Definition 3.6.1. Множество главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_m$ называется факторным множеством Ω, если выполняется следующее условие. Если эффект взаимодействия факторов $F_{n_1}, \dots, F_{n_r}$ принадлежит множеству Ω, то полное множество эффектов взаимодействия факторов $F_{l_1}, \dots, F_{l_v}$ принадлежит множеству Ω для всех $v = 1, \dots, r$ и $l_1, \dots, l_v = n_1, \dots, n_r, \quad l_1 \neq \ \dots \ \neq l_v$.

Определение 3.2.2 согласуется с определением 3.6.1 вследствие очевидного взаимно-однозначного соответствия между подмножествами факторов и подмножествами главных эффектов и эффектов взаимодействия этих факторов.

§ 7. Условие пропорциональности частот

Настоящий параграф посвящен фундаментальному понятию – условию пропорциональности частот, введенному Плакеттом (R.L.Plackett) [3].

Для двух факторов F_i и F_j введем $(s_i \times s_j)$-матрицу $\mathbf{W} = \{\omega_{ij}^{ln}\}$, где ω_{ij}^{ln} – число одновременных появлений l-го уровня F_i и n-го уровня F_j. Если ω_i^l – общее число появлений l-го уровня фактора F_i, а ω_j^n – общее число появлений n-го уровня фактора F_j, то, очевидно,

$$\mathbf{W}_i = \begin{Vmatrix} w_i^0 \\ w_i^1 \\ \vdots \\ w_i^{s_i-1} \end{Vmatrix} = \mathbf{WI}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{Vmatrix} w_j^0 \\ w_j^1 \\ \vdots \\ w_j^{s_j-1} \end{Vmatrix} = \mathbf{W}^T\mathbf{I}.$$

Рассмотрим $(N \times 1)$ – вектор $\mathbf{S}$ и матрицу $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$, имеющую среди N своих строк $s_1 \dots s_r$ различных (соответствующих различным комбинациям факторов $F_1, \dots, F_r$) и $s_1 \dots s_r$ столбцов, которые составляют линейно независимую систему векторов,

Вместо каждого множества одинаковых строк $\mathbf{\Phi}_{1\dots r}$ запишем одну строку и вместо соответствующих элементов S напишем их среднее. Полученные матрицу и столбец обозначим соответственно через $\bar{\mathbf{\Phi}}_{1\dots r}$ и $\bar{\mathbf{S}}$.

Так как для главного эффекта, как и для любого контраста, выполняется условие ортогональности единичному вектору, то

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_i^T \mathbf{W}_i = \begin{Vmatrix} N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} = \mathbf{\Delta}_i$$

или

$$\mathbf{W}_i = \bar{\mathbf{\Phi}}_i^{T-1}\mathbf{\Delta}_i. \qquad (3.7.1)$$

Аналогично

$$\mathbf{W}_j = \bar{\mathbf{\Phi}}_j^{T-1}\mathbf{\Delta}_j. \qquad (3.7.2)$$

Теорема 3.7.1 [3]. Если

$$\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_j = 0, \qquad (3.7.3)$$

то

$$N\mathbf{W} = \mathbf{W}_i\mathbf{W}_j^T.$$

Доказательство. Условие (3.7.3) запишем в виде

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_i^T\mathbf{W}\bar{\mathbf{\Phi}}_j = \begin{Vmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} = \frac{1}{N}\mathbf{\Delta}_i\mathbf{\Delta}_j^T.$$

Отсюда с учетом равенств (3.7.1) и (3.7.2) получим

$$N\mathbf{W} = \bar{\mathbf{\Phi}}_i^{T-1}\mathbf{\Delta}_i\mathbf{\Delta}_j\bar{\mathbf{\Phi}}_j^{-1} = \mathbf{W}_i\mathbf{W}_j^T,$$

что и требовалось.

Таким образом, теорема 3.7.1 устанавливает необходимое условие попарной ортогональности векторов главных эффектов (по одному от каждого фактора). Это условие – условие пропорциональности частот – состоит в том, что уровни одного фактора встречаются с каждым из уровней другого фактора с пропорциональными частотами.

Определение 3.7.1. Если $w_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t}$ – число одновременных появлений $j_1, \ldots, j_t$-х уровней факторов F_{i_1}, … , F_{i_t} соответственно, то условие

$$N^{t-1}w_{i_1 \ldots i_t}^{j_1 \ldots j_t} = w_{i_1}^{j_1} \ldots w_{i_t}^{j_t} \quad (\text{для любых } j_1, \ldots, j_t) \qquad (3.7.4)$$

называется условием пропорциональности частот для факторов $F_{i_1}, \ldots, F_{i_t}$.

Определение 3.7.2. Будем говорить, что выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4) для факторного множества Ω, если условие пропорциональности частот (3.7.4) выполняется для каждого множества факторов, отвечающих любым двум элементам множества Ω.

Пусть план включает все комбинации уровней факторов F_i и F_j. Тогда количество независимых эффектов взаимодействия первого порядка этих факторов будет определяться выражением (3.4.6). В этом и только в этом случае матрица $\bar{\bar{\mathbf{\Phi}}}_{ij}$ будет квадратной. Если потребовать выполнения условия

$$\mathbf{\Phi}_{ij}^T \mathbf{F}_n = 0$$

для некоторого фактора F_n, то, как при доказательстве теоремы 3.7.1, получим, что уровни фактора F_n встречаются с комбинациями уровней факторов F_i и F_j с пропорциональными частотами:

$$N w_{nij}^{k_n k_i k_j} = w_n^{k_n} w_{ij}^{k_i k_j}.$$

Если к тому же выполняется условие (3.7.3), то вследствие теоремы 3.7.1

$$N w_{ij}^{k_i k_j} = w_i^{k_i} w_j^{k_j}.$$

Поэтому

$$N^2 w_{nij}^{k_n k_i k_j} = w_n^{k_n} w_i^{k_i} w_j^{k_j}.$$

Аналогичное заключение можно сделать для произвольного числа факторов. Для этого будем рассматривать следующее разбиение множества факторов $F_1, \dots, F_r$. Первым разбиением факторы $F_1, \dots, F_r$ делятся на два произвольных множества. Вторым разбиением каждое подмножество первого разбиения, если оно состоит более чем из одного фактора, также делится на два произвольных подмножества и т. д. Разбиение факторов будем называть полным, если каждое подмножество последнего разбиения состоит только из одного фактора.

Теорема 3.7.2. Пусть для *t* факторов $F_1, \dots, F_t$ существует такое полное разбиение, что выполняется следующее условие. Любое подмножество *l*-го разбиения делится $(l+1)$-м разбиением на такие два подмножества $F_{i_1}, \dots, F_{i_p}$ и $F_{i_{p+1}}, \dots, F_{i_q}$, что

$$\mathbf{\Phi}_{i_1 \dots i_p}^T \mathbf{\Phi}_{i_{p+1} \dots i_q} = \begin{Vmatrix} N^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

а) для каждой комбинации уровней одного подмножества факторов, все комбинации уровней другого подмножества факторов встречаются пропорционально своим общим появлениям;

б) для факторов $F_1, \dots, F_t$ выполняется условие пропорциональности частот.

Докажем теперь достаточность условия (3.7.4) для попарной ортогональности главных эффектов и эффектов взаимодействия по одному от каждой матрицы эффектов. Доказательство будет опираться на лемму, вытекающую из теоремы 3.6.1.

Лемма 3.7.1. Если для факторов $F_1, \dots, F_t$ и столбца **S** выполняется условие

$$\mathbf{S}^T \mathbf{\Phi}_{1\dots r} = \mathbf{0},$$

то сумма элементов **S**, соответствующих любой комбинации уровней $F_1, \dots, F_t$ равна нулю.

Доказательство. $\mathrm{Rg}(\overline{\mathbf{\Phi}}_{1\dots r}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{\Phi}_{1\dots r})$, и вследствие теоремы 3.6.1 $\overline{\mathbf{\Phi}}_{1\dots r}$ – квадратная невырожденная матрица. $\overline{\mathbf{S}}$ будет ортогонален ко всем столбцам матрицы $\overline{\mathbf{\Phi}}_{1\dots r}$. Поэтому все элементы **S** равны нулю, что и требовалось.

Из леммы 3.7.1 следует, в частности, что ортогональность эффекта взаимодействия $\boldsymbol{\xi}_{1\dots r+1}$ r-го порядка факторов $F_1, \dots, F_{r+1}$ всем эффектам взаимодействия n-го $(n < r)$ порядка этих факторов влечет за собой равенство нулю суммы коэффициентов $\boldsymbol{\xi}_{1\dots r+1}$, отвечающих любой комбинации уровней любых n факторов из $F_1, \dots, F_{r+1}$.

Теорема 3.7.3. Если для t факторов выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4), то все главные эффекты и эффекты взаимодействия этих факторов (по одному от каждого множества эффектов) попарно ортогональны.

Доказательство. Пусть P и R – произвольные два подмножества соответственно из p и r факторов множества из t факторов, для которых выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4). Суммируя обе части равенства (3.7.4) по всем уровням некоторых факторов, получим, что условие пропорциональности частот выполняется для любого подмножества факторов из t данных. В частности, это условие пропорциональности частот выполняется для множества факторов, входящих в объединение $T = P \cup R$. Через $\boldsymbol{\xi}_P$ и $\boldsymbol{\xi}_R$ обозначим произвольные эффекты взаимодействия соответственно $(p - 1)$-го и $(r - 1)$-го порядков факторов, входящих в P и R. Рассмотрим два случая:

1) множество $Q = P \cap R$ пусто;

2) множество Q не пусто.

Случай 1. $\boldsymbol{\xi}_P$ является контрастом, поэтому сумма элементов $\boldsymbol{\xi}_P$ равна нулю. Условие пропорциональности частот выполняется для факторов множества T. Поэтому для любой комбинации уровней всех факторов из R любые комбинации уровней всех факторов из P встречаются пропорционально своим общим появлениям в плане. Элементы $\boldsymbol{\xi}_P$ равны для одинаковых комбинаций всех факторов из P. Поэтому равна нулю сумма элементов $\boldsymbol{\xi}_P$, соответствующих части плана для любой комбинации уровней всех факторов из $\boldsymbol{R}$. Следовательно, $\boldsymbol{\xi}_P$ и $\boldsymbol{\xi}_R$ ортогональны.

Случай 2. Любой эффект $\boldsymbol{\xi}_P$ по определению эффекта взаимодействия ортогонален любому эффекту из Q. Вследствие леммы 3.7.1 для части $\boldsymbol{D}_Q$ плана, отвечающей любой комбинации уровней факторов из

Q, сумма коэффициентов $\boldsymbol{\xi}_P$ равна нулю. Комбинации уровней всех факторов из P с каждой комбинацией уровней всех факторов из $R \setminus Q$ встречаются пропорционально числам своих общих появлений. В частности, то же самое можно сказать о комбинациях уровней всех факторов из P для части плана $\mathbf{D}_{Q'}$. Следовательно, сумма коэффициентов $\boldsymbol{\xi}_P$ равна нулю для любой комбинации факторов из R. Поэтому $\boldsymbol{\xi}_P$ ортогонален $\boldsymbol{\xi}_R$.

Таким образом, теорема доказана.

Очевидно, что внутри любой матрицы эффектов все главные эффекты или эффекты взаимодействия можно выбрать ортогональными. В этом случае, если план таков, что для любых t факторов выполняется условие пропорциональности частот, то, кроме эффектов, принадлежащих одной матрице эффектов, будут попарно ортогональны также все главные эффекты и эффекты взаимодействия любого множества из t факторов.

§ 8. Построение эффектов взаимодействия

Теорема 3.8.1. Для любых t факторов $F_1, \dots, F_t$, для которых выполняется условие пропорциональности частот, произведение $\mathbf{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_t$ векторов $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_t$ главных эффектов факторов $F_1, \dots, F_t$ соответственно дает столбец $\mathbf{S}_{1\dots t}$, представляющий собой вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_t$.

Доказательство. Зависимость элементов $\mathbf{S}_{1\dots t}$ только от уровней факторов $F_1, \dots, F_t$ очевидна. Поэтому остается доказать ортогональность $\mathbf{S}_{1\dots t}$ вектору $\mathbf{I}$ и любым векторам главных эффектов и эффектов взаимодействия вплоть до порядка $t-2$ факторов $F_1, \dots, F_t$.

Для двух факторов F_1 и F_2 ортогональность $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S'}_1$ ($\mathbf{S'}_1$ – любой вектор главных эффектов фактора F_1, быть может совпадающий с $\mathbf{S}_1$) эквивалентна ортогональности $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S'}_1$ и $\mathbf{S}_2$. По условию теоремы $\mathbf{S}_2$ ортогонален всем векторам главных эффектов фактора F_1. Поэтому вследствие леммы 3.7.1 сумма элементов $\mathbf{S}_2$, отвечающих любому уровню фактора F_1, равна нулю. А так как $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S'}_1$ для данного уровня фактора F_1 имеет одинаковые элементы, то $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S'}_1$ ортогонален $\mathbf{S}_2$.

Продолжая доказательство по индукции, на (n – 1)-м шаге ($n \le t$) получим столбец $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_n$. Ортогональность его любым столбцам $\mathbf{S}_{1\dots l}$ $(i \le n-1)$ главных эффектов или эффектов взаимодействия вплоть до $(l-1)$-го порядка эквивалентна ортогональности двух столбцов $\mathbf{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_l \otimes \mathbf{S}_{1\dots l}$ и $\mathbf{S}_{l+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_n$. Но по индукционному предположению $\mathbf{S}_{l+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{S}_n$ является эффектом взаимодействия $(n-l-1)$-го порядка и, следовательно, ортогонален всем главным эффектам и эффектам взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_l$. Поэтому по лемме 3.7.1 сумма элементов $\mathbf{S}_{l+1} \otimes ... \otimes \mathbf{S}_n$, отвечающих любой комбинации уровней факторов $F_1, ..., F_l$, равна нулю, что и доказывает теорему.

Теорема 3.8.2. Пусть условие пропорциональности частот (3.7.4) выполняется для заданного множества факторов $F_1, ..., F_t$. И пусть все матрицы главных эффектов содержат попарно ортогональные столбцы. Тогда всевозможные произведения столбцов $\mathbf{S}_1, ..., \mathbf{S}_t$ (по одному от каждого фактора) соответствуют полному набору из $(s_1 - 1) \times ... \times (s_t - 1)$ попарно ортогональных эффектов взаимодействия факторов $F_1, ..., F_t$.

Доказательство. Рассмотрим два различных произведения столбцов, взятых по одному от каждого фактора: $\mathbf{S}_1 \otimes ... \otimes \mathbf{S}_t$ и $\mathbf{S'}_1 \otimes ... \otimes \mathbf{S'}_t$. Среди этих двух наборов столбцов, по крайней мере, одна пара (скажем, $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S'}_1$) будет содержать различные столбцы. Элементы столбца $\mathbf{S}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{S}_t \otimes \mathbf{S'}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{S'}_t$ зависят только от уровней факторов $F_2, ..., F_t$. Теперь остается показать, что сумма элементов $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S'}_1$ для любой комбинации уровней факторов $F_2, ..., F_t$ равна нулю. Действительно, вследствие теоремы 3.7.2 для любой комбинации уровней факторов $F_2, ..., F_t$ уровни F_1 встречаются пропорционально их общим появлениям. Следовательно, для всех комбинаций уровней факторов $F_2, ..., F_t$ суммы элементов $\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S'}_1$ будут одного знака. А так как по условию теоремы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S'}_1$ ортогональны, то эти суммы элементов равны нулю, что и требовалось.

Теорема 3.8.2 может быть обобщена на случай матриц главных эффектов, не обязательно содержащих попарно ортогональные столбцы.

Теорема 3.8.3. Для заданного множества факторов $F_1, ..., F_t$, для которых выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4), всевозможные произведения столбцов $\mathbf{S}_1, ..., \mathbf{S}_t$ (по одному от каждого фактора) соответствуют полному набору из $(s_1 - 1) ... (s_t - 1)$ линейно независимых эффектов взаимодействия факторов $F_1, ..., F_t$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей части теоремы 3.4.1.

§ 9. Эффекты уровней и эффекты взаимодействия уровней

Будем иногда рассматривать трехфакторный план для того, чтобы избежать громоздких обозначений. Переход к общему случаю прост.

Обозначим $\eta_{ijn} = Ey_{ijn}$, где y_{ijn} – наблюдение, соответствующее точке полного плана $\mathbf{D}^f$ для которой фактор F_1 поддерживается на i-м уровне, фактор F_2 – на j-м и фактор F_3 – на n-м уровне. Звездочка вместо некоторого индекса будет означать, что производится усреднение по всем уровням соответствующего фактора. Например,

$$\eta_{*jn} = \frac{1}{s_1} \sum_{i=0}^{s_1-1} \eta_{ijn}.$$

Определение 3.9.1. Число $\beta_0 = \eta_{***}$ называется истинным средним; число $\beta_1^i = \eta_{i**} - \eta_{***}$ – эффектом i-го уровня фактора F_1.

Определение 3.9.2.Эффектом взаимодействия β_{12}^{ij} уровней i и j факторов F_1 и F_2 соответственно называется разность между эффектом уровня i фактора F_1 при условии, что фактор F_2 поддерживается на уровне j, и эффектом уровня i фактора F_1.

Определение 3.9.3.Эффектом взаимодействия β_{123}^{ijn} уровней i, j, n факторов F_1 F_2, F_3 соответственно называется разность между эффектом взаимодействия уровней j и n факторов F_2 и F_3 при условии, что фактор F_1 поддерживается на уровне i и эффектом взаимодействия уровней j и n факторов F_2 и F_3.

Очевидно, что это определение корректно, так как оно симметрично относительно факторов F_1, F_2 и F_3. Например, для трехфакторного плана

$$\begin{aligned}\beta_{123}^{ijn} &= \left(\eta_{ijn} - \eta_{*jn} - \eta_{i*n} + \eta_{**n}\right)\\ &-\left(\eta_{ij*} - \eta_{*j*} - \eta_{i**} + \eta_{***}\right)\\ &= \eta_{ijn} - \eta_{ij*} - \eta_{i*n} - \eta_{*jn} + \eta_{i**} + \eta_{*j*} + \eta_{**n} - \eta_{***}.\end{aligned} \tag{3.9.1}$$

Аналогично определяются другие эффекты уровней и эффекты взаимодействия уровней.

Любой эффект уровня фактора так же, как и эффект взаимодействия уровней факторов, есть алгебраическая сумма математических ожиданий наблюдений для $\mathbf{D}^f$ с некоторыми коэффициентами. Коэффициенты образуют векторы, которые назовем векторами эффектов уровней фактора и эффектов взаимодействия уровней факторов. Вектор эффекта i-го уровня фактора F_1 обозначим через $\boldsymbol{\psi}_1^{(i)}$, вектор эффекта взаимодействия уровней i и j факторов F_1 и F_2 соответственно обозначим через $\boldsymbol{\psi}_{12}^{ij}$ и т. д.

В соотношении (3.9.1) коэффициент при η, соответствующем наблюдению, в котором:

1) факторы F_1 , F_2 и F_3 , поддерживаются на уровнях i, j и n соответственно, есть $1/N\,(s_1s_2s_3 - s_1s_2 - s_1s_3 - s_2s_3 + s_1 + s_2 + s_3 - 1) = 1/N\,(s_1 - 1)(s_2 - 1)(s_3 - 1)$;

2) факторы F_1 и F_2 поддерживаются на уровнях i и j соответственно и фактор F_3 поддерживается на уровне, отличном от n, равен $1/N\,(-s_1s_2 + s_1 + s_2 - 1) = -(1/N)(s_1 - 1)(s_2 - 1)$;

3) фактор F_1 поддерживается на уровне i, а факторы F_2 и F_3 поддерживаются на уровнях, отличных от j и n соответственно, равен $1/N\,(s_1 - 1)$;

4) факторы F_1, F_2 и F_3 поддерживаются на уровнях, отличных от i, j и n соответственно, равен -1.

Все это изображено в табл. 2.

Таблица 2
Вектор эффекта взаимодействия уровней i, j и n

F_1	F_2	F_3	Элемент вектора эффекта взаимодействия уровней i, j и n факторов F_1, F_2 и F_3 соответственно
i	j	n	$1/N\,(s_1-1)(s_2-1)(s_3-1)$
i	j		$-1/N\,(s_1-1)(s_2-1)$
i		n	$-1/N\,(s_1-1)(s_3-1)$
	j	n	$-1/N\,(s_2-1)(s_3-1)$
i			$1/N\,(s_1-1)$
	j		$1/N\,(s_2-1)$
		n	$1/N\,(s_3-1)$
			$-1/N$

Каждой строке табл. 2 соответствует серия экспериментов. Если, например, фактор F_1 поддерживается во всей этой серии на уровне i, в соответствующей клетке таблицы записан индекс i; если фактор F_1 поддерживается во всей серии на уровне, отличном от i -го, клетка таблицы не заполняется. Аналогична запись для факторов F_2 и F_3.

Пусть

$$\Delta_{i\,j\,*}^{+-}=\begin{cases}1- & \text{если фактор } F_1 \text{ в } u\text{-м опыте поддерживается}\\ & \text{на уровне } i, \text{а фактор } F_2 \text{ в } u\text{-м опыте}\\ & \text{поддерживается на уровне, отличном от } j,\\ 0- & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Будем также использовать подобные обозначения в аналогичных случаях.

Тогда общий вид элемента вектора эффекта взаимодействия уровней $\boldsymbol{\psi}_{123}^{ijn}$, соответствующей u-му опыту с учетом таблицы 2 будет

$$\psi_{123}^{ijn}(u)=\frac{1}{N}\{\Delta_{i\,j\,n}^{+++}(s_1-1)(s_2-1)(s_3-1)$$
$$-\Delta_{i\,j\,n}^{++-}(s_1-1)(s_2-1)$$
$$-\Delta_{i\,j\,n}^{+-+}(s_1-1)(s_3-1)$$
$$-\Delta_{i\,j\,n}^{-++}(s_2-1)(s_3-1)$$
$$+\Delta_{i\,j\,n}^{+--}(s_1-1)+\Delta_{i\,j\,n}^{-+-}(s_2-1)+\Delta_{i\,j\,n}^{--+}(s_3-1)-\Delta_{i\,j\,n}^{---}\}=$$

$$=\frac{1}{N}\{\Delta_{i**}^{+}(s_1-1)-\Delta_{i**}^{-}\}\{\Delta_{*j*}^{+}(s_2-1)-\Delta_{*j*}^{-}\}\{\Delta_{**n}^{+}(s_3-1)-\Delta_{**n}^{-}\}.$$

В справедливости этого можно убедиться, если принять во внимание следующие равенства:

$$\Delta^{+}_{i**}\Delta^{+}_{*j*}\Delta^{+}_{**n} = \Delta^{+++}_{i\,j\,n};\quad \Delta^{+}_{i**}\Delta^{+}_{*j*}\Delta^{-}_{**\bar{n}} = \Delta^{++-}_{i\,j\,\bar{n}};$$
$$\Delta^{+}_{i**}\Delta^{-}_{*\bar{j}*}\Delta^{-}_{**\bar{n}} = \Delta^{+--}_{i\,\bar{j}\,\bar{n}};\quad \Delta^{-}_{\bar{i}**}\Delta^{-}_{*\bar{j}*}\Delta^{-}_{**\bar{n}} = \Delta^{---}_{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{n}}.$$

Аналогично, в общем случае элемент вектора $\boldsymbol{\psi}^{i_1\dots i_r}_{1\dots r}$ эффекта взаимодействия уровней i_j $(j = 1,\dots,r)$ факторов $F_1,\dots,F_r$ есть

$$\psi^{i_1\dots i_r}_{1\dots r}(u) = \frac{1}{N}\left\{\Delta^{+}_{i_1*\dots*}(s_1-1) - \Delta^{-}_{\bar{i}_1*\dots*}\right\} \times \dots$$
$$\times \left\{\Delta^{+}_{*\dots*i_r*\dots*}(s_r-1) - \Delta^{-}_{*\dots*\bar{i}_r*\dots*}\right\}.$$

В частности, элемент вектора эффекта i-го уровня фактора F_1 есть

$$\psi^{i_1}_{1}(u) = \frac{1}{N}\left\{\Delta^{+}_{i_1*\dots*}(s_1-1) - \Delta^{-}_{\bar{i}_1*\dots*}\right\}. \tag{3.9.2}$$

Следовательно,

$$N\psi^{i_1\dots i_r}_{1\dots r}(u) = N\psi^{i_1}_{1}(u)\dots N\psi^{i_r}_{r}(u)$$

или

$$N\boldsymbol{\psi}^{i_1\dots i_r}_{1\dots r} = N\boldsymbol{\psi}^{i_1}_{1} \otimes \dots \otimes N\boldsymbol{\psi}^{i_r}_{r}. \tag{3.9.3}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.9.1. Вектор эффекта взаимодействия уровней $i_1,\dots,i_r$ факторов $F_1,\dots,F_r$ соответственно с точностью до множителя есть произведение векторов эффектов уровней $i_1,\dots,i_r$ факторов $F_1,\dots,F_r$.

Очевидно, что $\boldsymbol{\psi}^{i_1}_{1},\dots,\boldsymbol{\psi}^{i_r}_{r}$ представляют собой векторы главных эффектов факторов $F_1,\dots,F_r$ соответственно. Поэтому вектор эффекта взаимодействия уровней $\boldsymbol{\psi}^{i_1\dots i_r}_{1\dots r}$ с учетом замечания 1 к теореме 3.4.1 есть вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1,\dots,F_r$ для плана $\mathbf{D}^f$.

Нетрудно проверить, что среди всех векторов главных эффектов фактора F_1 с элементами типа $\Delta^{+}_{i*\dots*}(s_1-1) - \Delta^{-}_{\bar{i}*\dots*}$ для $i = 0,1,\dots,s_1-1$ любые $i-1$ из них образуют систему линейно независимых векторов. Аналогичное утверждение можно сделать для факторов $F_2,\dots,F_r$. Всевозможные произведения этих независимых главных эффектов по одному для каждого фактора образуют $(s_1-1)\dots(s_r-1)$ эффектов взаимодействия уровней факторов $F_1,\dots,F_r$. По замечанию 1 к теореме 3.4.1 эти $(s_1-1)\dots(s_r-1)$ эффектов взаимодействия уровней образуют систему линейно независимых векторов. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.9.2. Любой вектор эффекта взаимодействия уровней факторов $F_1,\dots,F_r$ есть вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1,\dots,F_r$. Максимальная линейно независимая подсистема векторов эффектов взаимодействия уровней факторов $F_1,\dots,F_r$ содержит точно $(s_1-1)\dots(s_r-1)$ векторов.

§ 10. Модель истинных эффектов для качественных факторов

Обозначим через $\boldsymbol{\psi}_i = \left\|\boldsymbol{\psi}_i^0, \boldsymbol{\psi}_i^1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_i^{s_i-1}\right\|$ матрицу всех векторов эффектов уровней фактора F_i, через $\boldsymbol{\psi}_{ij}$ – матрицу всех векторов эффектов взаимодействия уровней факторов F_i и F_j и т. д. Тогда из равенства (3.9.3) следует, что

$$N\boldsymbol{\psi}_{i_1\ldots i_r} = N\boldsymbol{\psi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes N\boldsymbol{\psi}_{i_r}.$$

Пусть далее

$$\boldsymbol{\Psi}_{1\ldots m} = \left\|\frac{1}{N}\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_m, \boldsymbol{\psi}_{12}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{1\ldots m}\right\|.$$

Пусть

$$x_i^{(j)}(u) = \begin{cases} 1, - \text{если фактор } F_i \text{ в } u\text{-м опыте} \\ \qquad \text{поддерживается на уровне } j, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.10.1}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_i^{jT} = \left(x_i^{(j)}(1), \ldots, x_i^{(j)}(N)\right), \mathbf{x}_i = \left\|\mathbf{x}_i^0, \ldots, \mathbf{x}_i^{s_i-1}\right\|, \\ &\mathbf{x}_{i_1\ldots i_r} = \mathbf{x}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{i_r}, \\ &\mathbf{X}_{1\ldots m} = \|\mathbf{I}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{12}, \ldots, \mathbf{x}_{1\ldots m}\|. \end{aligned} \tag{3.10.2}$$

Теорема 3.10.1.

$$\mathbf{X}_{1\ldots m}\boldsymbol{\Psi}_{1\ldots m}^T = \mathbf{E}_N. \tag{3.10.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и ранее, рассмотрим трехфакторный план. Переход к общему случаю не вызывает существенных трудностей. Рассмотрим в матрице $\mathbf{X}_{123}$ строку, соответствующую i-, j- и n-му уровням факторов F_1, F_2 и F_3.соответственно; в матрице $\boldsymbol{\Psi}_{123}$ – строку, отвечающую некоторой комбинации уровней факторов F_1, F_2 и F_3. Тогда скалярное произведение этих двух строк в матрице $\mathbf{X}_{123}$ и в матрице $\boldsymbol{\Psi}_{123}$ равно

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{N}\{1 + [\Delta_{i**}^{+}(s_1 - 1) - \Delta_{i**}^{-}] + [\Delta_{*j*}^{+}(s_2 - 1) - \Delta_{*j*}^{-}] \\ &+[\Delta_{**n}^{+}(s_3 - 1) - \Delta_{**n}^{-}] \\ &+[\Delta_{i**}^{+}(s_1 - 1) - \Delta_{i**}^{-}]\,[\Delta_{*j*}^{+}(s_2 - 1) - \Delta_{*j*}^{-}] \\ &+[\Delta_{i**}^{+}(s_1 - 1) - \Delta_{i**}^{-}]\,[\Delta_{**n}^{+}(s_3 - 1) - \Delta_{**n}^{-}] \\ &+[\Delta_{*j*}^{+}(s_2 - 1) - \Delta_{*j*}^{-}]\,[\Delta_{**n}^{+}(s_3 - 1) - \Delta_{**n}^{-}] \\ &+[\Delta_{i**}^{+}(s_1 - 1) - \Delta_{i**}^{-}]\,[\Delta_{*j*}^{+}(s_2 - 1) - \Delta_{*j*}^{-}][\Delta_{**n}^{+}(s_3 - 1) - \Delta_{**n}^{-}]\}. \end{aligned} \tag{3.10.4}$$

Если рассматриваемая строка $\mathbf{\Psi}_{123}$ отвечает i-му уровню F_1, j-му уровню F_2 и n-му уровню F_3, то

$$\Delta^{+}_{i**} = \Delta^{+}_{*j*} = \Delta^{+}_{**n} = 1 \quad \Delta^{-}_{i**} = \Delta^{-}_{*j*} = \Delta^{-}_{**n} = 0,$$

и, следовательно, (3.10.4) обращается в

$$\frac{1}{N}\{1 + (s_1 - 1) + (s_2 - 1) + (s_3 - 1) +$$
$$+(s_1 - 1)(s_2 - 1) + (s_1 - 1)(s_3 - 1) + (s_2 - 1)(s_3 - 1) +$$
$$+(s_1 - 1)(s_2 - 1)(s_3 - 1)\} = \frac{1}{N} = s_1 s_2 s_3 = 1.$$

Тем самым доказано, что диагональные элементы $\mathbf{X}_{123}\mathbf{\Psi}^{T}_{123}$ равны 1.

Предположим, что в рассматриваемой строке $\mathbf{\Psi}_{123}$ по крайней мере один из факторов F_1, F_2 и F_3 поддерживается на уровне, отличном соответственно от i-, j- и n-го. Без ограничения общности можно считать, что фактор F_3 поддерживается на уровне, отличном от n- го. Тогда выражение (3.10.4) принимает вид

$$A + A[\Delta^{+}_{**n}(s_3 - 1) - \Delta^{-}_{**n}] = 0,$$

где

$$A = 1 + [\Delta^{+}_{i**}(s_1 - 1) - \Delta^{-}_{i**}] + [\Delta^{+}_{*j*}(s_2 - 1) - \Delta^{-}_{*j*}]$$
$$+[\Delta^{+}_{i**}(s_1 - 1) - \Delta^{-}_{i**}]\,[\Delta^{+}_{*j*}(s_2 - 1) - \Delta^{-}_{*j*}].$$

Таким образом, теорема доказана.

Определим вектор $\mathfrak{B}$ истинных эффектов для качественных факторов:

$$\mathfrak{B} = \mathbf{\Psi}^{T}_{1\ldots m}\boldsymbol{\eta}^{f}, \tag{3.10.5}$$

где $\boldsymbol{\eta}^{f}$, как и раньше, означает вектор математических ожиданий наблюдений в точках полного плана. Вследствие (3.10.3) и (3.10.5) получим

$$\boldsymbol{\eta}^{f} = \mathbf{X}_{1\ldots m}\mathfrak{B}. \tag{3.10.6}$$

Можно рассматривать (3.10.6) как модель, которая справедлива для всех точек $\mathbf{D}^{f}$.

Обозначим через $\mathbf{X}^{\Omega}$ и $\mathfrak{B}^{\Omega}$ части матрицы $\mathbf{X}_{1\ldots m}$ и вектора $\mathfrak{B}$ соответственно, отвечающие факторному множеству Ω. Если предположить, что элементы вектора $\mathfrak{B}$, не соответствующие факторному множеству Ω, равны нулю, то (3.10.6) перепишется следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta}^{f} = \mathbf{X}^{\Omega}\,\mathfrak{B}^{\Omega}. \tag{3.10.7}$$

Коэффициенты модели (3.10.6) и, следовательно, модели (3.10.7) допускают удобную интерпретацию. Эта интерпретация становится очевидной при непосредственном рассмотрении определений эффектов уровней и эффектов взаимодействия уровней.

Пример 3.10.1. Пусть

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} F_1 & F_2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\| \end{array}; \quad \mathrm{E}\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_9 \end{matrix} \right\|.$$

В этом случае полный план и соответствующий вектор математических ожиданий наблюдений будут

$$\mathbf{D}^f = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\|; \quad \mathrm{E}\mathbf{y}^f = \boldsymbol{\eta}^f = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_9 \end{matrix} \right\|.$$

Для плана $\mathbf{D}^f$ матрица $\boldsymbol{\Psi}_{12}$ записывается следующим образом:

$$9\boldsymbol{\Psi}_{12} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{I} & 9\boldsymbol{\psi}_1 & 9\boldsymbol{\psi}_2 & 9\boldsymbol{\psi}_{12} = 9\boldsymbol{\psi}_1 \otimes 9\boldsymbol{\psi}_2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{array}{c|ccc|ccc|ccccccccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 4 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 4 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Вектор истинных эффектов будет

$$\mathfrak{B} = \Big(\beta_0, \beta_1^{(0)}, \beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(0)}, \beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \beta_{12}^{(00)}, \beta_{12}^{(01)}, \beta_{12}^{(02)},$$
$$\beta_{12}^{(10)}, \beta_{12}^{(11)}, \beta_{12}^{(12)}, \beta_{12}^{(20)}, \beta_{12}^{(21)}, \beta_{12}^{(22)}\Big) = \boldsymbol{\Psi}_{12}^T \boldsymbol{\eta}^f.$$

Тогда вследствие равенства (3.10.6) в точках $\mathbf{D}^f$ будет справедлива модель

$$\eta = \mathbf{X}_{12}\mathfrak{B},$$

где в соответствии с равенством (3.10.2)

$$\mathbf{D}^f = \begin{array}{c} \begin{matrix} F_1 & F_2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\| \end{array};$$

$$\mathbf{X}_{12} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{I} & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{array}{c|ccc|ccc|ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

В предположении, что все эффекты взаимодействия уровней равны нулю, получим модель

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\eta}^f = \beta_0 + \beta_1^{(0)}\mathbf{x}_1^0 + \beta_1^{(1)}\mathbf{x}_1^1 + \beta_1^{(2)}\mathbf{x}_1^2 \\ +\beta_2^{(0)}\mathbf{x}_2^0 + \beta_2^{(0)}\mathbf{x}_2^1 + \beta_2^{(2)}\mathbf{x}_2^2, \end{gathered} \qquad (3.10.8)$$

где $\mathbf{x}_i^j$ принимает в u-й точке $\mathbf{D}^f$ значение $x_i^{(j)}(u)$ в соответствии с равенством (3.10.1).

Матрица коэффициентов **X** плана **D** для модели (3.10.8) будет иметь вид

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{I} & \mathbf{x}_1^0 & \mathbf{x}_1^1 & \mathbf{x}_1^2 & \mathbf{x}_2^0 & \mathbf{x}_2^1 & \mathbf{x}_2^2 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array}.$$

В модели (3.10.6) матрица коэффициентов $\mathbf{X}_{1\dots m}$ для полного плана не является матрицей полного ранга. Например, сумма столбцов, принадлежащих $\mathbf{x}_1$, дает $\mathbf{I}$. Поэтому решение нормальных уравнений метода наименьших квадратов для оценивания параметров $\mathfrak{B}$ модели не будет единственным. Однако можно вывести систему линейных равенств для этих параметров вида

$$\mathbf{H}\mathfrak{B} = 0 \tag{3.10.9}$$

таких, что матрица

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{X}_{1\dots m} \\ \mathbf{H} \end{matrix} \right\| \tag{3.10.10}$$

будет матрицей полного ранга, и никакая строка $\mathbf{H}$ не будет представима в виде линейной комбинации строк $\mathbf{X}_{1\dots m}$. В этом случае для плана, задаваемого матрицей $\mathbf{X}_{1\dots m}$, то есть для полного плана при ограничениях на параметры (3.10.9), будут существовать единственные м.н.к.-оценки параметров $\mathfrak{B}$ [4].

Рассмотрим u-ю строку матрицы $\boldsymbol{\psi}_1$ векторов эффектов уровней фактора F_1 $\left[\psi_1^{(0)}(u),\ \psi_1^{(1)}(u),\ \dots,\ \psi_1^{(s_1-1)}(u)\right]$. Поскольку

$$\sum_{n=0}^{s_1-1} \Delta^+_{n*\dots*} = 1, \quad \sum_{n=0}^{s_1-1} \Delta^-_{n*\dots*} = s_1 - 1\,,$$

вследствие равенства (3.9.2) получим

$$\sum_{n=0}^{s_1-1} \psi_1^{(n)}(u) = \sum_{n=0}^{s_1-1} \{\Delta^+_{n*\dots*}(s_1-1) - \Delta^-_{n*\dots*}\} = 0.$$

Таким образом, для любого фактора F_i

$$\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{I}_{s_i} = \mathbf{0} \quad (i = 1,\ \dots,\ m). \tag{3.10.11}$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{\psi}_i \otimes \boldsymbol{\psi}_j^{n_j} \mathbf{I}_{s_j} = \mathbf{0},$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 \otimes \boldsymbol{\psi}_2^{n_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\psi}_m^{n_m} \mathbf{I}_{s_1} = \mathbf{0},$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^{n_1} \otimes \boldsymbol{\psi}_2^{n_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\psi}_m \mathbf{I}_{s_m} = \mathbf{0}$$

$$(i, j = 1, \dots, m;\ i \neq j;\ n_l = 0, \dots, s_l - 1).$$

Отсюда с учетом (3.10.11) получим

$$\sum_{n_i=0}^{s_i-1} \beta_i^{(n_i)} = 0,\ \sum_{n_i=0}^{s_i-1} \beta_{ij}^{(n_i n_j)} = 0, \dots ,$$
$$\sum_{n_1=0}^{s_1-1} \beta_{12\dots m}^{(n_1 n_2 \dots n_m)} = 0, \dots , \sum_{n_m=0}^{s_m-1} \beta_{12\dots m}^{(n_1 n_2 \dots n_m)} = 0, \qquad (3.10.12)$$
$$i, j = 1, \ \dots , m;\ i \neq j;\ n_l = 0, \dots , s_l - 1.$$

Тогда (3.10.12) запишется следующим образом:

$$\mathbf{H}\mathfrak{B} = \mathbf{0}, \qquad (3.10.13)$$

где через $\mathbf{H}$ обозначена матрица коэффициентов системы (3.10.12). Разобьем также $\mathbf{H}$ на подматрицы в соответствии с разбиениями $\mathbf{X}_{1\dots m}$ и $\mathbf{\Psi}_{1\dots m}$:

$$\mathbf{H} = \|\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots , \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_{12}, \dots , \mathbf{H}_{1\dots m}\|.$$

Тогда, например, для полного плана 3^2 матрица $\mathbf{H}$ будет иметь вид

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_{12} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|ccc|ccc|ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Столбцы матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{X}_{1\dots m}$ обозначим через $\mathbf{h}$ и $\mathbf{x}$ соответственно, снабдив их индексами, соответствующими индексам $\boldsymbol{\psi}$. Так, столбцы матрицы $\mathbf{H}$ запишутся следующим образом $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{h}_1^0$, $\mathbf{h}_1^1$, $\mathbf{h}_1^2$, $\mathbf{h}_2^0$, $\mathbf{h}_2^1$, $\mathbf{h}_2^2$, $\mathbf{h}_{12}^{00}$, $\mathbf{h}_{12}^{01}$, $\mathbf{h}_{12}^{02}$, $\mathbf{h}_{12}^{10}$, $\mathbf{h}_{12}^{11}$, $\mathbf{h}_{12}^{12}$, $\mathbf{h}_{12}^{20}$, $\mathbf{h}_{12}^{21}$, $\mathbf{h}_{12}^{22}$.

Лемма 3.10.1. Пусть для вектора $\boldsymbol{\gamma}$

$$\mathbf{H}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\gamma} \neq 0. \qquad (3.10.14)$$

Тогда $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$ есть вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1, \dots , F_r$ и для любого вектора эффекта взаимодействия этих факторов $\boldsymbol{\psi}$ найдется вектор $\boldsymbol{\gamma}$, удовлетворяющий равенствам (3.10.14), такой, что $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$.

Доказательство. Очевидно, что любой столбец матрицы $\boldsymbol{\psi}_{1\dots r}$, как и любой вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1, \dots , F_r$ может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\mathbf{x}_{1\dots r}$, а именно $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$.

Пусть

$$\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i_1=0}^{s_1-1} \sum_{i_r=0}^{s_r-1} \mathbf{x}_{1\dots r}^{i_1\dots i_r} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)}.$$

По определению вектора эффекта взаимодействия, $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$ ортогонален всем столбцам матрицы

$$\boldsymbol{\Phi}_{i_1\dots i_{r-1}} = \left\| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_{i_1}, \dots, \mathbf{F}_{i_{r-1}}, \ \mathbf{F}_{i_1 \mathrm{i}_2}, \dots, \mathbf{F}_{i_1\dots i_{r-1}} \ \right\|$$

для любых факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{r-1}}$ из $F_1, \dots, F_r$. Поэтому по лемме 3.7.1 сумма элементов $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$, отвечающих любой комбинации уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{r-1}}$ равна нулю, то есть

$$\sum_{i_1=0}^{s_1-1} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)} = 0, \dots, \sum_{i_r=0}^{s_r-1} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)} = 0. \qquad (3.10.15)$$

Отсюда

$$\mathbf{H}_{1\dots r}\gamma = \left\| \begin{matrix} \left\{\sum_{i_1=0}^{s_1-1} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)}\right\} \\ \vdots \\ \left\{\sum_{i_r=0}^{s_r-1} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)}\right\} \end{matrix} \right\| = 0\,. \qquad (3.10.16)$$

И, таким образом, условие (3.10.14) выполняется.

Докажем теперь, что при выполнении условия (3.10.14) вектор $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$ есть вектор эффекта взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$.

Суммируя, например, первое из равенств (3.10.15) по $i_2, \dots, i_r$, получим

$$\sum_{i_1=0}^{s_1-1} \dots \sum_{i_r=0}^{s_r-1} \gamma_{1\dots r}^{(i_1\dots i_r)} = 0.$$

Это означает, что $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$ – контраст. Из условия (3.10.14) следует, что справедливо равенство (3.10.16) и, следовательно, равенство (3.10.15). Поэтому сумма элементов $\mathbf{x}_{1\dots r}\boldsymbol{\gamma}$, отвечающих любой комбинации уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{r-1}}$ из $F_1, \dots, F_r$, равна нулю.

Таким образом, лемма доказана.

Теорема 3.10.1. Матрица (3.10.10) есть матрица полного ранга, и никакая строка $\mathbf{H}$ не представима в виде линейной комбинации строк $\mathbf{X}_{1\dots m}$.

Доказательство. Тот факт, что никакая строка $\mathbf{H}$ не представима в виде линейной комбинации строк $\mathbf{X}_{1\dots m}$, очевиден. Докажем, что не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{\gamma}$ такого, что

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{X}_{1\dots \mathrm{m}} \\ \mathbf{H} \end{matrix} \right\| \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \qquad (3.10.17)$$

Действительно, (3.10.17) влечет

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \qquad (3.10.18)$$

По лемме 3.10.1 из равенства (3.10.18) следует, что

$$\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}_1^T, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m^T, \boldsymbol{\gamma}_{12}^T, \dots, \boldsymbol{\gamma}_{1\dots m}^T),$$

где $\mathbf{x}_i\boldsymbol{\gamma}_i$ – вектор главных эффектов фактора F_i ; $\mathbf{x}_{i_1\dots i_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r}$ – вектор эффекта взаимодействия факторов F_{i_1}, … , F_{i_r} . Поэтому

$$\mathbf{X}_{1\dots m}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{I}\gamma_0 + \mathbf{x}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \dots + \mathbf{x}_m\boldsymbol{\gamma}_m + \mathbf{x}_{12}\boldsymbol{\gamma}_{12} + \dots + \mathbf{x}_{1\dots m}\boldsymbol{\gamma}_{1\dots m}. \quad (3.10.19)$$

По теореме 3.4.1 все векторы в правой части равенства (3.10.19) ортогональны. Следовательно,

$$\mathbf{X}_{1\dots m}\boldsymbol{\gamma} \neq 0,$$

что противоречит (3.10.17).

Таким образом, теорема 3.10.1 доказана.

Модель (3.10.6) с ограничениями (3.10.13) назовем полной факторной моделью истинных эффектов для качественных факторов (или C^f-моделью истинных эффектов).

Обозначим через $\mathbf{H}^\Omega$ подматрицу матрицы $\mathbf{H}$, отвечающую факторному множеству Ω. Тогда модель (3.10.7) с ограничениями $\mathbf{H}^\Omega\mathfrak{B}^\Omega = \mathbf{0}$ будем называть факторной моделью истинных эффектов для множества Ω для качественных факторов или C^Ω-моделью истинных эффектов. Будем иногда опускать слова «истинных эффектов» в обозначении этой модели.

Для C^Ω-модели, очевидно, выполняются следующие два условия:

1. C^Ω-модель (3.10.7) истинных эффектов содержит свободный член и члены со всеми эффектами уровней для любого фактора.

2. Если модель содержит хотя бы один член с эффектом взаимодействия некоторых уровней r факторов, то она содержит члены со всеми эффектами взаимодействия уровней любых n $(n \leq r)$ из этих факторов.

§ 11. Смешанная модель

Рассмотрим полный план $\mathbf{D}^f$ наряду с планом $\mathbf{D}$ для случая, когда часть факторов $(F_1, \dots, F_n)$ имеет качественную структуру, а остальные факторы $(F_{n+1}, \dots, F_m)$ – количественную структуру.

Для качественных факторов, как и в §10, используем матрицы $\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\psi}_i = \left\|\boldsymbol{\psi}_i^0, \dots, \boldsymbol{\psi}_i^{s_i-1}\right\|$ всех векторов эффектов уровней факторов F_i $(i = 1, \dots, n)$. Для количественных факторов, так же, как и в §5, возьмем матрицы $\boldsymbol{\rho}_j = (1/N^f)\mathbf{F}_j^f$ векторов главных эффектов факторов F_j $(j = n+1, \dots, m)$ для плана $\mathbf{D}^f$. В качестве векторов эффектов взаимодействия для качественных факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ $(i_1, \dots, i_r \le n)$ используем матрицу $\boldsymbol{\rho}_{i_1 \dots i_r}$ всех векторов эффектов взаимодействия уровней факторов $F_{i_1}, \dots$, F_{i_r}:

$$N^f \boldsymbol{\rho}_{i_1 \dots i_r} = N^f \boldsymbol{\psi}_{i_1 \dots i_r} = N^f \boldsymbol{\psi}_{i_1} \otimes \dots \otimes N^f \boldsymbol{\psi}_{i_r}.$$

Для количественных факторов $F_{j_1}, \dots, F_{j_l}$ $(j_1, \dots, j_l \ge n+1)$ возьмем матрицу $\boldsymbol{\rho}_{j_1 \dots j_l}$ эффектов взаимодействия факторов $F_{j_1}, \dots, F_{j_l}$:

$$N^f \boldsymbol{\rho}_{j_1 \dots j_l} = \mathbf{F}^f_{j_1 \dots j_l}.$$

Для качественных факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ $(i_1, \dots, i_r \le n)$ и количественных факторов $F_{j_1}, \dots, F_{j_l}$ $(j_1, \dots, j_l \ge n+1)$ рассмотрим матрицу $\boldsymbol{\rho}_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_l}$:

$$N^f \boldsymbol{\rho}_{i_1 \dots i_r \, j_1 \dots j_l} = N^f \boldsymbol{\psi}_{i_1 \dots i_r} \otimes \mathbf{F}^f_{j_1 \dots j_l}. \tag{3.11.1}$$

Используя метод доказательства теоремы 3.9.2, в данном случае получим следующую теорему.

Теорема 3.11.1. Любой вектор матрицы (3.11.1) есть вектор эффекта взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}, F_{j_1}, \dots, F_{j_l}$ **.** Максимальная линейно независимая подсистема векторов эффектов взаимодействия матрицы (3.11.1) содержит точно $(s_{i_1} - 1) \dots (s_{i_r} - 1)(s_{j_1} - 1) \dots (s_{j_l} - 1)$ векторов.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{1 \dots m} = \left\| \ \frac{1}{N^f} \mathbf{I}, \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}_{12}, \dots, \boldsymbol{\rho}_{1 \dots m} \ \right\|, \\
&\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i \ \ (i = 1, \dots, n), \\
&\mathbf{z}_i = \mathbf{F}^f_j \ \ (j = n+1, \dots, m), \\
&\mathbf{z}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \mathbf{x}_{i_1 \dots i_r} \otimes \mathbf{F}^f_{j_1 \dots j_l} \\
&\ (i_1, \dots, i_r \le n; j_1, \dots, j_l \ge n+1), \\
&\mathbf{Z}_{1 \dots m} = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_{12}, \dots, \mathbf{z}_{1 \dots m} \ \|.
\end{aligned} \tag{3.11.2}$$

Теорема 3.11.2.

$$\mathbf{Z}_{1 \dots m} \mathbf{P}^T_{1 \dots m} = \mathbf{E}_{N^F}. \tag{3.11.3}$$

Доказательство. Рассмотрим полный план $\mathbf{D}'$ с s_i опытами для одного фактора F_i**.** Тогда легко получим из теорем 3.4.1 и 3.10.1, что

$$\mathbf{X}'_i \boldsymbol{\Psi}'^T_i = \frac{1}{s_i} \boldsymbol{\Phi}'_i \boldsymbol{\Phi}'^T_i = \mathbf{E}_{s_i}.$$

Однако

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{X}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{X}'_i \end{matrix} \right\| = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{x}_i \ \|; \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{\Psi}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{\Psi}'_i \end{matrix} \right\| = \frac{N^f}{s_i} \left\| \ \frac{1}{N^f} \mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}_i \ \right\|;$$

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{\Phi}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}'_i \end{matrix} \right\| = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_i^f \ \|.$$

Поэтому

$$\frac{N^f}{s_i} \| \ \mathbf{I}, \mathbf{x}_i \ \| \cdot \left\| \ \frac{1}{N^f} \mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}_i \ \right\|^T = \frac{1}{s_i} \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_i^f \ \| \cdot \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_i^f \ \|^T,$$

и

$$\mathbf{x}_i \boldsymbol{\psi}_i^T = \tfrac{1}{N^f} \mathbf{F}_i^f \mathbf{F}_i^{f\mathrm{T}} = \mathbf{z}_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \qquad (3.11.4)$$

Тогда с учетом равенств (3.11.2) и (3.11.4) получим для $i_1, \ldots, i_r \le n$ и $j_1, \ldots, j_l \ge n + 1$, что

$$\mathbf{z}_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_l} \boldsymbol{\rho}^T_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_l} = \left(\mathbf{x}_{i_1 \ldots i_r} \otimes \mathbf{F}^f_{j_1 \ldots j_l} \right) \left(\boldsymbol{\psi}_{i_1 \ldots i_r} \otimes \mathbf{F}^f_{j_1 \ldots j_l} \right)^T$$
$$= \left(N^f \right)^{r+l-1} \left(\mathbf{x}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_{i_r} \otimes \mathbf{F}^f_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{F}^f_{j_l} \right)$$
$$\times \left(\boldsymbol{\psi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\psi}_{i_r} \otimes \frac{1}{N^f} \mathbf{F}^f_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{F}^f_{j_l} \right)^T$$
$$= \left(N^f \right)^{r+l-1} \left(\mathbf{x}_{i_1} \boldsymbol{\psi}^T_{i_1} \right) * \ldots * \left(\mathbf{x}_{i_r} \boldsymbol{\psi}^T_{i_r} \right) * \left(\frac{1}{N^f} \mathbf{F}^f_{j_1} \mathbf{F}^{fT}_{j_1} \right) * \ldots * \left(\frac{1}{N^f} \mathbf{F}^f_{j_l} \mathbf{F}^{fT}_{j_l} \right)$$
$$= \left(N^f \right)^{r+l-1} \left(\mathbf{x}_{i_1} \boldsymbol{\psi}^T_{i_1} \right) * \ldots * \left(\mathbf{x}_{j_l} \boldsymbol{\psi}^T_{j_l} \right) = \mathbf{x}_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_l} \boldsymbol{\psi}^T_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_l},$$

где $*$ означает почленное перемножение матриц.

Тогда с учетом равенства (3.10.3) получим (3.11.3).

Обозначим через

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{P}^T_{1 \ldots m} \boldsymbol{\eta}^f \qquad (3.11.5)$$

вектор истинных эффектов смешанной модели. Тогда из теоремы 3.11.2 следует, что

$$\boldsymbol{\eta}^f = \mathbf{Z}_{1 \ldots m} \mathbf{\Theta}. \qquad (3.11.6)$$

Для параметров (3.11.5) смешанной модели (3.11.6) справедливы равенства, аналогичные равенствам (3.10.12), причем суммирование нужно проводить только по индексам $i, \ j \le n$. Если через $\mathbf{V}$ обозначить матрицу коэффициентов получаемой при этом системы, то

$$\mathbf{V\Theta} = \mathbf{0}. \tag{3.11.7}$$

Пользуясь методами, аналогичными методам §10, можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3.11.3. Матрица

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{Z}_{1\dots m} \\ \mathbf{V} \end{matrix} \right\|$$

есть матрица полного ранга, и никакая строка **V** не представима в виде линейной комбинации строк $\mathbf{Z}_{1\dots m}$.

Модель (3.11.6) с ограничениями (3.11.7) будем называть смешанной полной факторной моделью истинных эффектов, или G^f -моделью истинных эффектов.

Пример 3.11.1. Для полного плана 3^2 рассмотрим случай факторной модели, для которой фактор F_1 – качественный, а фактор F_2 – количественный. Тогда

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & & \mathbf{z}_1 & \qquad\qquad \mathbf{z}_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_1 \otimes \mathbf{z}_2 \end{array} \\ \mathbf{Z}_{1\dots m} = \left\| \begin{array}{c|ccc|cc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & \sqrt{1/2} \end{array} \right\|^T, \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \frac{1}{9}\mathbf{I} & \qquad \rho_1 & \qquad\qquad \rho_2 \qquad\qquad\qquad & \rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2 \end{array} \\ \mathbf{P}_{1\dots m} = \left\| \begin{array}{c|ccc|cc|cccccc} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & \frac{1}{9}\sqrt{3/2} & \frac{1}{9}\sqrt{1/2} & \frac{1}{9}\sqrt{3/2} & \frac{1}{9}\sqrt{1/2} & \frac{1}{9}\sqrt{3/2} & \frac{1}{9}\sqrt{1/2} & \frac{1}{9}\sqrt{3/2} & \frac{1}{9}\sqrt{1/2} \end{array} \right\|^T, \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{V} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_{12} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|ccc|cc|cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \end{array}$$

Обозначим через Z^{Ω}, V^{Ω} и Θ^{Ω} части матриц $Z_{1\ldots m}, V$ и вектора Θ соответственно, отвечающие факторному множеству Ω. Пусть элементы вектора Θ, не отвечающие множеству Ω равны нулю. Тогда справедлива модель, которую назовем смешанной факторной моделью истинных эффектов для множества Ω или G^{Ω}-моделью истинных эффектов:

$$\boldsymbol{\eta}^f = \mathbf{Z}^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} \quad \left(\mathbf{V}^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} = \mathbf{0}\right). \tag{3.11.8}$$

Будем иногда опускать слова «истинных эффектов» в обозначении этой модели.

Модель (3.11.8) можно доопределить в более широкой области. В этом случае придем к модели

$$Ey(X_1, \ldots, X_m) = \mathbf{f}_g^T(X_1, \ldots, X_m)\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} \ \left(\mathbf{V}^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} = \mathbf{0}\right),$$

где $\mathbf{f}_g^T(X_{1u}, \ \ldots \ , \ X_{mu})$ совпадает с u-й строкой матрицы $\mathbf{Z}^{\Omega}$.

§ 12. Эквивалентность факторных моделей

В этом параграфе мы сосредоточим свое внимание на проблеме эквивалентности факторных моделей (в смысле свойств связанных с ними регрессий). Модели истинных эффектов A^{Ω} и C^{Ω} – частные случаи модели истинных эффектов G^{Ω}. Поэтому из рассмотренных факторных моделей только общая A^{Ω}-модель не является частным случаем G^{Ω}-модели истинных эффектов. Следовательно, для доказательства регрессионной эквивалентности всех типов факторных моделей для множества Ω достаточно доказать эквивалентность двух произвольных G^{Ω}-моделей (или, что то же самое, произвольной G^{Ω}-модели истинных эффектов и произвольной A^{Ω}-модели истинных эффектов) и эквивалентность A^{Ω}-модели истинных эффектов и общей A^{Ω}-модели.

Рассмотрим множество $S^{\Omega f}$, состоящее из вектора $\mathbf{I}$ и полного множества линейно независимых эффектов для факторного множества Ω и полного плана $\mathbf{D}^f$. Для дробного факторного плана $\mathbf{D}$ (то есть для плана, не содержащего некоторых комбинаций уровней) рассмотрим множество $S^{\Omega D}$ векторов, координаты которых, соответствующие некоторой комбинации уровней факторов, равны элементам векторов множества $S^{\Omega f}$, соответствующих той же самой комбинации уровней для плана $\mathbf{D}^f$. Будем называть векторы эффектов множества $S^{\Omega D}$ векторами эффектов, порождаемых планом $\mathbf{D}$ и факторным множеством Ω, и будем обозначать их верхним индексом $\mathbf{D}$. Через $\mathbf{Z}^{\Omega D}$ обозначим матрицу коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для G^{Ω}-модели (3.11.8).

Рассмотрим вопрос об оцениваемости параметров модели (3.11.8) при помощи дробного плана $\mathbf{D}$, включающего некоторые опыты (быть может, повторенные несколько раз) полного плана $\mathbf{D}^f$.

Лемма 3.12.1. Матрица

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{Z}^{\Omega D} \\ \mathbf{V}^{\Omega} \end{matrix} \right\| \tag{3.12.1}$$

тогда и только тогда есть матрица полного ранга, когда векторы эффектов, порождаемые планом $\mathbf{D}$ и факторным множеством Ω, линейно независимы.

Доказательство. Пусть существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{\gamma}$, что

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{Z}^{\Omega D} \\ \mathbf{V}^{\Omega} \end{matrix} \right\| \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \tag{3.12.2}$$

Тогда $\mathbf{V}^{\Omega}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, и по лемме 3.10.1

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \left(\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}_1^T, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m^T, \boldsymbol{\gamma}_{i_1 i_2}^T, \dots\right),$$

где $\mathbf{z}_i\boldsymbol{\gamma}_i$ – вектор главных эффектов фактора F_i; $\mathbf{x}_{i_1\dots i_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r}$ – вектор эффекта взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$.

Поэтому

$$\mathbf{Z}^{\Omega D}\boldsymbol{\gamma} = \gamma_0\mathbf{I} + \textstyle\sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i^D\boldsymbol{\gamma}_i^T + \sum_{i_1 i_2} \mathbf{z}_{i_1 i_2}^D \boldsymbol{\gamma}_{i_1 i_2} + \dots = 0, \tag{3.12.3}$$

где в $\mathbf{z}^D$ входят те и только те строки из $\mathbf{z}$, которые соответствуют точкам дробного плана $\mathbf{D}$, то есть $\mathbf{I}$, $\mathbf{z}_i^D\boldsymbol{\gamma}_i^T$, $\mathbf{z}_{i_1 i_2}^D\boldsymbol{\gamma}_{i_1 i_2}^T, \dots$ – векторы эффектов, порождаемые планом $\mathbf{D}$ и факторным множеством Ω. Из равенства (3.12.3) следует, что эти векторы эффектов, порождаемые планом $\mathbf{D}$ и факторным множеством Ω, линейно независимы. По лемме 3.10.1 любой вектор эффекта взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ представим в виде $\mathbf{z}_{i_1\dots i_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r}$ $\left(\mathbf{V}_{i_1\dots i_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r} = \mathbf{0}\right)$. Тогда соответствующий вектор эффекта, порождаемый планом $\mathbf{D}$, будет

$$\mathbf{z}_{i_1\dots i_r}^D\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r} \quad \left(\mathbf{V}_{i_1\dots i_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_1\dots i_r} = \mathbf{0}\right).$$

По предположению, найдутся такие $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{i_1 i_2}, \dots$, не равные одновременно нулю, что

$\lambda_0\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{z}_i^D \boldsymbol{\gamma}_i + \sum_{i_1,i_2} \lambda_{i_1 i_2} \mathbf{z}_{i_1 i_2}^D \boldsymbol{\gamma}_{i_1 i_2} + \cdots = 0.$

Тогда для вектора $\boldsymbol{\gamma}^T = \left(\lambda_0,\ \lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1^T, \dots, \lambda_m\boldsymbol{\gamma}_m^T, \lambda_{i_1 i_2}\boldsymbol{\gamma}_{i_1 i_2}^T, \dots\ \right)$

$\mathbf{Z}^{\Omega D}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{V}^{\Omega}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$,

то есть выполняется соотношение (3.12.2).

Таким образом, лемма доказана.

Пусть дробному плану **D** отвечают три множества факторов $F_1, \dots, F_m$; $F_1', \dots, F_m'$ и количественные факторы $F_1'', \dots, F_m''$ такие, что $s_i = s_i' = s_i''$. Для факторов $F_1, \dots, F_m$ рассмотрим G^{Ω}-модель истинных эффектов

$$\boldsymbol{\eta}^f = \mathbf{Z}^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} \tag{3.12.4}$$

с ограничениями на параметры

$$\mathbf{V}^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}^{\Omega} = \mathbf{0}\ . \tag{3.12.5}$$

Для факторов $F_1', \dots, F_m'$ рассмотрим G^{Ω}-модель истинных эффектов

$$\boldsymbol{\eta}^f = \mathbf{Z}'^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}'^{\Omega}$$

с ограничениями на параметры

$$\mathbf{V}'^{\Omega}\boldsymbol{\Theta}'^{\Omega} = \mathbf{0}.$$

Для факторов $F'_1, \dots, F'_m$ рассмотрим общую A^{Ω}-модель (3.2.4) с матрицей коэффициентов **X**.

Теорема 3.12.1. Пусть для плана **D** одна из матриц

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{Z}^{\Omega D} \\ \mathbf{V}^{\Omega} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \mathbf{Z}'^{\Omega D} \\ \mathbf{V}'^{\Omega} \end{matrix} \right\| \quad \text{и } \mathbf{X}$$

есть матрица полного ранга. Тогда и любая другая из них есть также матрица полного ранга.

Доказательство этой теоремы с очевидностью может быть получено из леммы 3.12.1 и следствия теоремы 3.6.1.

Из теоремы 3.12.1 и леммы 3.12.1 следует, что существование единственных м.н.к.-оценок параметров модели для множества Ω не зависит от качественной или количественной структуры факторов и от вида факторной модели и зависит только от того, являются ли векторы эффектов, порождаемые планом **D** и факторным множеством Ω, линейно зависимыми или нет. План **D** называется невырожденным, если эти векторы эффектов (порождаемые планом **D** и факторным множеством Ω) линейно независимы.

Теорема 3.12.2. Для невырожденного факторного плана **D** все факторные модели для одного и того же факторного множества Ω эквивалентны в регрессионном смысле (для любой точки оценки регрессионной функции равны и дисперсии этих оценок тоже равны).

Доказательство. Установим эту эквивалентность сначала между общей A^{Ω}-моделью и произвольной A^{Ω}-моделью истинных эффектов, а затем – между произвольной G^{Ω} -моделью истинных эффектов и произвольной A^{Ω}-моделью истинных эффектов.

Рассмотрим A^{Ω}-модель истинных эффектов

$$\begin{aligned} &Ey_t(X_1,\dots,X_m) = \mathbf{f}_t^T(X_1,\dots,X_m)\mathbf{B}_t^{\Omega} \\ &= B_{t0} + \textstyle\sum_i \mathbf{f}_{ti}^T(X_i)\,\mathbf{B}_{ti} \\ &+ \textstyle\sum_{i_1,i_2}[\mathbf{f}_{ti_1}(X_{i_1}) \otimes \mathbf{f}_{ti_2}(X_{i_2})]^T \mathbf{B}_{ti_1 i_2+\cdots}, \end{aligned} \tag{3.12.6}$$

определенную на множестве Z_t, не обязательно совпадающем с $\mathbf{D}^f$, такую, что

$$\mathbf{F}_i^f = \begin{Vmatrix} \mathbf{f}_{ti}^T(X_{i1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{ti}^T(X_{iN^f}) \end{Vmatrix}.$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbf{\Phi}^{\Omega} = \begin{Vmatrix} \mathbf{f}_t^T(X_{11},\dots,X_{m1}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_t^T(X_{1N^f},\dots,X_{mN^f}) \end{Vmatrix}.$$

Матрица коэффициентов плана **D** для модели (3.12.6) $\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}^{\Omega D}$.

Рассмотрим также общую A^{Ω}-модель, определенную на множестве Z_g:

$$\begin{aligned} &Ey(X_1,\ \dots,\ X_m) \\ &= \mathbf{f}^T(X_1,\ \dots,\ X_m)\mathbf{B}^{\Omega} = B_0 + \textstyle\sum_i \mathbf{f}_i^T(X_i)\,\mathbf{B}_i \\ &+ \textstyle\sum_{i_1,i_2}\left[\mathbf{f}_{i_1}(X_{i_1}) \otimes \mathbf{f}_{i_2}(X_{i_2})\right]^T \mathbf{B}_{i_1 i_2} + \cdots \end{aligned} \tag{3.12.7}$$

Обозначим через **X** матрицу коэффициентов плана **D** для модели (3.12.7). Подматрица $\mathbf{\Phi}_i^{fD} = \|\ \mathbf{I},\ \mathbf{F}_i^{fD}\ \|$ матрицы $\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}^{\Omega D}$ имеет размер $N \times s_i$ и ранг s_i. Подматрица

$$\mathbf{G}_i = \begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{f}_i^T(X_{i1}) \\ & \vdots \\ 1 & \mathbf{f}_i^T(X_{iN}) \end{Vmatrix}$$

матрицы $\mathbf{X}$ имеет также размер $N \times s_i$ и ранг s_i. В силу следствия теоремы 3.6.1 эти подматрицы связаны невырожденным линейным преобразованием $\mathbf{A}_i$:

$$\mathbf{\Phi}_i^{fD} = \mathbf{G}_i\mathbf{A}_i \tag{3.12.8}$$

и матрицы $\mathbf{X}_t$ и $\mathbf{X}$ связаны некоторым невырожденным линейным преобразованием

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{XA}. \tag{3.12.9}$$

Более того, для точек $\mathbf{D}^f$ справедливо равенство

$$\mathbf{f}_t^T(X_1, \ \dots, \ X_m) = \mathbf{f}^T(X_1, \ \dots, \ X_m)\mathbf{A}. \tag{3.12.10}$$

Тогда для точки $(X_1, \ \dots, \ X_m) \in \mathbf{D}^f$ м.н.к.-оценка для модели (3.12.6) вследствие (3.12.9) и (3.12.10) совпадает с м.н.к.-оценкой для модели (3.12.7):

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(X_1, \dots, X_m) &= \mathbf{f}_t^T(X_1, \dots, X_m)\widehat{\mathbf{B}}_t \\ &= \mathbf{f}_t^T(X_1, \dots, X_m)(\mathbf{X}_t^T\mathbf{X}_t)^{-1}\mathbf{X}_t\mathbf{y} \\ &= \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{XA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ &= \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \hat{y}(X_1, \dots, X_m). \end{aligned} \tag{3.12.11}$$

Дисперсия оценки $\hat{y}_t(X_1, \dots, X_m)$ для точки $(X_1, \dots, X_m) \in \mathbf{D}^f$ вследствие (3.12.9) и (3.12.10) совпадает с дисперсией оценки $\hat{y}(X_1, \dots, X_m)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2(\hat{y}_t)}{\sigma^2} &= \mathbf{f}_t^T(X_1, \dots, X_m)(\mathbf{X}_t^T\mathbf{X}_t)^{-1}\mathbf{f}_t(X_1, \dots, X_m) \\ &= \mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{XA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{f}(X_1, \dots, X_m) \\ &\mathbf{f}^T(X_1, \dots, X_m)(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{f}(X_1, \dots, X_m) = \frac{\sigma^2(\hat{y})}{\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.12.12}$$

Будем считать, что модель (3.12.6) определена на Z_t так, что справедливо равенство, аналогичное равенству (3.12.8), во всей области $Z = Z_t \cap Z_g$, то есть что

$$\mathbf{f}_{ti}^T(X_i) = \mathbf{f}_i^T(X_i)\mathbf{A}_i.$$

Тогда равенство (3.12.10), а с ними равенства (3.12.11) и (3.12.12) будут выполняться для всех точек $(X_1, \dots, X_m) \in Z$.

Для доказательства эквивалентности G^Ω-модели и A^Ω-модели покажем, что редуцирование схемы (3.12.4) – (3.12.5) к схеме без ограничений на параметры с матрицей коэффициентов полного ранга приводит к A^Ω-модели истинных эффектов

$$\boldsymbol{\eta}^f = \boldsymbol{\Phi}^\Omega \mathbf{B}^\Omega, \tag{3.12.13}$$

где $\boldsymbol{\Phi}^\Omega$ содержит векторы эффектов факторного множества Ω для плана $\mathbf{D}$.

Рассмотрим модель (3.12.4) с ограничениями на параметры (3.12.5). Эти ограничения разбиваются на системы частных ограничений вида

$$\mathbf{V}_{1\ldots r}\boldsymbol{\Theta}_{1\ldots r} = \mathbf{0}, \tag{3.12.14}$$

где $\boldsymbol{\Theta}_{1\ldots r}$ – соответствующая часть вектора $\boldsymbol{\Theta}^\Omega$, то есть $\boldsymbol{\Theta}_{1\ldots r} = \boldsymbol{\rho}_{1\ldots r}^T \boldsymbol{\eta}^f$. Пусть $\boldsymbol{\gamma}_i$ есть одно из решений системы (3.12.14). Тогда вследствие леммы 3.10.1 вектору $\boldsymbol{\gamma}_i$ соответствует вектор $\mathbf{z}_{1\ldots r}\boldsymbol{\gamma}_i$ эффектов взаимодействия факторов $F_1, \ldots, F_r$.

Лемма 3.12.2. Система линейно независимых векторов $\boldsymbol{\gamma}_i$ таких, что $\mathbf{V}_{1\ldots r}\boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{0}$,соответствует системе линейно независимых векторов $\mathbf{z}_{1\ldots r}\boldsymbol{\gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ эффектов взаимодействия факторов $F_1, \ldots, F_r$.

Доказательство. Из равенства

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{z}_{1\ldots r}\boldsymbol{\gamma}_i = 0 \tag{3.12.15}$$

следует, что

$$\mathbf{z}_{1\ldots r}^T \mathbf{z}_{1\ldots r} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{0}.$$

Вследствие того, что $\mathbf{z}_{1\ldots r}^T \mathbf{z}_{1\ldots r} = n\mathbf{E}$,

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{0}. \tag{3.12.16}$$

Так же просто из равенства (3.12.16) может быть получено равенство (3.12.15), что и доказывает лемму.

Поскольку $\operatorname{Rg} \mathbf{V}_{1\ldots r} = s_1 \ldots s_r - (s_1 - 1) \ldots (s_r - 1)$, общее решение уравнения (3.12.14) есть

$$\boldsymbol{\Theta}_{1\ldots r} = \boldsymbol{\Gamma}_{1\ldots r}\mathbf{B}_{1\ldots r}, \tag{3.12.17}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}_{1\ldots r}$ – матрица размера $(s_1 \ldots s_r) \times [(s_1 - 1) \ldots (s_r - 1)]$ такая, что

$$\mathbf{V}_{1\ldots r}\boldsymbol{\Gamma}_{1\ldots r} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{Rg} \boldsymbol{\Gamma}_{1\ldots r} = (s_1 - 1) \ldots (s_r - 1), \tag{3.12.18}$$

и $\mathbf{B}_{1\ldots r}$ – произвольный $[(s_1 - 1) \ldots (s_r - 1)]$ -мерный вектор. Запишем теперь (3.12.4) в следующем виде:

$$\boldsymbol{\eta}^f = \Theta_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{z}_i \boldsymbol{\Theta}_i + \sum_{i_1, i_2} \mathbf{z}_{i_1 i_2} \boldsymbol{\Theta}_{i_1 i_2} + \cdots \tag{3.12.19}$$

Замена (3.12.17) дает следующее равенство:

$$\mathbf{z}_{1\ldots r}\boldsymbol{\Theta}_{1\ldots r} = \mathbf{z}_{1\ldots r}\boldsymbol{\Gamma}_{1\ldots r}\mathbf{B}_{1\ldots r} = \mathbf{X}_{1\ldots r}\mathbf{B}_{1\ldots r}, \tag{3.12.20}$$

где $\mathbf{X}_{1\dots r}$ вследствие (3.12.18) и леммы 3.12.2 содержит векторы эффектов взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$.

Замены, аналогичные (3.12.20), можно произвести для всех членов, входящих в выражение (3.12.3). С обозначениями

$$\mathbf{X} = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_{12}, \dots \ \|,$$
$$\mathbf{B}^{\Omega T} = \left\| \ \frac{1}{N}\mathbf{I}, \mathbf{B}_1^T, \dots, \mathbf{B}_m^T, \mathbf{B}_{12}^T, \dots \ \right\|$$

придем к требуемой модели (3.12.13).

§ 13. *G*-обращение информационной матрицы

Будем следовать работе [5] и рассмотрим один способ G-обращения информационной матрицы для факторной модели без ограничений, дающий одно из решений нормальных уравнений метода наименьших квадратов. Покажем, что м.н.к.-оценка является единственным решением для модели с факторными ограничениями.

Рассмотрим факторные план $\mathbf{D}$ и модель для качественных факторов $F_1, \dots, F_n$ на уровнях $s_1, \dots, s_n$ соответственно и количественных факторов $F_{n+1}, \dots, F_m$ на уровнях $s_{n+1}, \dots, s_m$ соответственно. Для того чтобы избежать громоздких обозначений, ограничимся моделью главных эффектов:

$$Ey = b_0 + \sum_{i=1}^{n} [b_{i0} x_{i0} + \dots + b_{i\,(s_i-1)} x_{i\,(s_i-1)}]$$
$$+ \sum_{i=\mathrm{n}+1}^{m} [b_{i1} x_{i1} + \dots + b_{i\,(s_i-1)} x_{i\,(s_i-1)}]. \tag{3.13.1}$$

Для параметров $b_{i,0}, \dots, b_{i\,(s_i-1)}$ выполняются равенства

$$b_{i0} + \dots + b_{i\,(s_i-1)} = 0 \ \ (i = 1, \dots, n), \tag{3.13.2}$$

или

$$b_{i\,(s_i-1)} = -b_{i0} - \dots - b_{i\,(s_i-2)}. \tag{3.13.3}$$

Пусть $\mathbf{X}^{(1)}$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (3.13.1). Обозначим через $\hat{b}_{i0}, \dots, \hat{b}_{i\,(s_i-1)}$ м.н.к.-оценки параметров $b_{i0}, \dots, b_{i\,(s_i-1)}$. Тогда м.н.к.-оценку $\widehat{\mathbf{B}}^{(1)}$ вектора $\mathbf{B}^{(1)}$ параметров модели (3.13.1), удовлетворяющую равенствам

$$\hat{b}_{i0} + \dots + \hat{b}_{i\,(s_i-1)} = 0 \ \ (i = 1, \dots, n), \tag{3.13.4}$$

можно найти как одно из решений нормальных уравнений

$$\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{B} = \mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{Y} \qquad (3.13.5)$$

(относительно $\mathbf{B}$), удовлетворяющее равенствам (3.13.4).

Любое решение $\hat{\hat{\mathbf{B}}}^{(\mathbf{1})}$ нормальных уравнений (3.13.5) можно найти с помощью матрицы $(\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{-}$, G-обратной к матрице $\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}$:

$$\hat{\hat{\mathbf{B}}}^{(1)} = (\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{-}\mathbf{X}^{(1)T}\boldsymbol{Y}.$$

Вектор $\hat{\hat{\mathbf{B}}}^{(1)}$ будет представлять собой одну из оценок по методу наименьших квадратов параметров модели без ограничений.

Вследствие теоремы 3.11.3 для любой факторной модели можно найти невырожденный план (например, полный план), для которого существуют и притом единственные м.н.к.-оценки параметров модели, удовлетворяющие факторным ограничениям (типа равенств (3.13.4)).

Для невырожденного плана $\mathbf{D}$ среди всех возможных матриц $(\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{-}$ будем искать такую (обозначим ее $(\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{+}$), что для соответствующего решения $\hat{\hat{\mathbf{B}}}^{(1)}$ выполняется равенство

$$\hat{\hat{\mathbf{B}}}^{(1)} = \hat{\mathbf{B}}^{(1)}.$$

Подставляя выражение для $b_{i\,(s_i-1)}$ из (3.13.3) в (3.13.1), получим вместо первой суммы следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n}[b_{i0}(x_{i0} - x_{i\,(s_i-1)}) + \cdots + b_{i\,(s_i-2)}(x_{i\,(s_i-2)} - x_{i\,(s_i-1)})] \qquad (3.13.6)$$

Коэффициенты в (3.13.6) можно принять за новые параметры. Вектор новых параметров $\boldsymbol{B}_i^{(2)} = (b_{i0}, \dots, b_{\boldsymbol{i}\,(s_i-2)})$ связан с вектором старых параметров $\boldsymbol{B}_i^{(1)} = \left(b_{i0}, \dots, b_{\boldsymbol{i}\,(s_i-1)}\right)$ соотношением

$$\mathbf{B}_i^{(1)} = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i^{(2)}, \qquad (3.13.7)$$

где

$$\mathbf{A}_i = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{Vmatrix} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для количественных факторов переход к новым параметрам запишем в следующем виде:

$$\mathbf{B}_i^{(1)} = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i^{(2)} \quad (i = n+1, \dots, m),$$

где $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, \dots n+1)$ – единичная матрица.

В результате получим следующую (редуцированную) модель, которую также можно рассматривать как факторную:

$$Ey = b_0 + \sum_{i=1}^{n} [b_{i0}(x_{i0} - x_{i\,(s_i-1)}) + \cdots$$
$$+ b_{i\,(s_i-2)}(x_{i\,(s_i-2)} - x_{i\,(s_i-1)})] \tag{3.13.8}$$
$$+ \sum_{i=n+1}^{m} \left[b_{i1}x_{i1} + \cdots + b_{i\,(s_i-1)}x_{i\,(s_i-1)}\right].$$

Таким образом, вектор параметров модели (3.13.8)

$$\mathbf{B}^{(2)} = (b_0, b_{10}, \dots, b_{1\,(s_1-2)}, \dots, b_{n0}, \dots, b_{n\,(s_n-2)},$$
$$b_{(n+1)1}, \dots, b_{(n+1)\,(s_{n+1}-1)}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{m\,(s_m-1)})$$

связан с вектором параметров модели (3.13.1)

$$\mathbf{B}^{(1)} = (b_0, b_{10}, \dots, b_{1\,(s_1-1)}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{n\,(s_n-1)},$$
$$b_{(n+1)1}, \dots, b_{(n+1)\,(s_n-1)}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{m\,(s_m-1)})$$

соотношением

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{(2)}, \tag{3.13.9}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_m \end{Vmatrix}.$$

Пусть план **D** невырожден для модели (3.13.1) с ограничениями (3.13.2). Тогда вследствие теоремы 3.12.1 этот план будет невырожден и для модели (3.13.8). Матрица $\mathbf{X}^{(2)}$ коэффициентов плана **D** для модели (3.13.8), как легко показать, имеет вид

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{1}\mathbf{A}. \tag{3.13.10}$$

Поэтому м.н.к.-оценка $\widehat{\mathbf{B}}^{(2)}$ вектора параметров $\mathbf{B}^{(2)}$ находится по формуле

$$\widehat{\mathbf{B}}^{(2)} = (\mathbf{X}^{(2)T}\mathbf{X}^{(2)})^{-1}\mathbf{X}^{(2)T}\boldsymbol{Y},$$

которая с учетом равенства (3.13.10) преобразуется к виду

$$\widehat{\mathbf{B}}^{(2)} = (\mathbf{A}^{T}\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{X}^{(1)T}\boldsymbol{Y},$$

где **Y** – вектор наблюдений, отвечающий плану **D** с ковариационной матрицей (2.1.2).

Ковариационная матрица вектора $\widehat{\mathbf{B}}^{(2)}$ есть

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = (\mathbf{X}^{(2)T}\mathbf{X}^{(2)})^{-1}\sigma^2 = (\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\sigma^2.$$

Отсюда с учетом (3.13.9) может быть найдена м.н.к.-оценка $\widehat{\mathbf{B}}^{(1)}$ (удовлетворяющая равенствам (3.13.4)) вектора $\mathbf{B}^{(1)}$ и ковариационная матрица $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ вектора оценок $\widehat{\mathbf{B}}^{(1)}$:

$$\widehat{\mathbf{B}}^{(1)} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\boldsymbol{Y}, \tag{3.13.11}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\sigma^2. \tag{3.13.12}$$

Таким образом, искомая G-обратная матрица имеет следующий вид:

$$(\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{+} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T,$$

и равенства (3.13.11) и (3.13.12) могут быть переписаны следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{B}}^{(1)} = (\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{+}\mathbf{X}^{(1)\mathrm{T}}\mathbf{Y},$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)} = (\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)})^{+}\sigma^2.$$

Рассмотрим еще один способ получения м.н.к.-оценки $\mathbf{B}^{(1)}$. Обозначим через $\mathbf{I}_k$ единичный k-мерный вектор и через $\mathbf{0}$ – вектор из нулей. Добавим теперь к матрице $\mathbf{X}^{(1)}$ матрицу $\mathbf{X}_0$, состоящую из m строк:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{I}_{s_1}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{0}^T & \mathbf{I}_{s_m}^T \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь еще одну (третью) регрессионную задачу с матрицей коэффициентов

$$\mathbf{X}^3 = \begin{Vmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}_0 \end{Vmatrix}$$

и с вектором наблюдений

$$\mathbf{Y}^3 = \begin{Vmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Будем обозначать через SS сумму квадратов разностей между экспериментальными и вычисленными на основании регрессионного уравнения значениями. Нижний индекс LS будет указывать на то, что сумма квадратов соответствует регрессионному уравнению, полученному по методу наименьших квадратов. Верхние индексы (2) и (3) для SS, **B** и **X**, как и ранее, будут указывать на соответствующую регрессионную задачу. Знак $\widehat{\ }$ будет указывать на м.н.к.-оценку, знак $\widehat{\widehat{\ }}$ — на произвольную оценку.

Теорема 3.13.1.

$$SS_{LS}^{(2)} = SS_{LS}^{(3)}, \tag{3.13.13}$$
$$\widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{3}} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{B}}^{(2)}. \tag{3.13.14}$$

Доказательство. Существуют такие оценки параметров третьей модели, что

$$SS^{(3)} = SS_{LS}^{(2)}. \tag{3.13.15}$$

Действительно, положим

$$\widehat{\widehat{\mathbf{B}}}^{\mathbf{3}} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{B}}^{(2)}. \tag{3.13.16}$$

Легко проверить, что для оценок (3.13.16) справедливо равенство (3.13.15). Из равенства (3.13.15) следует, что

$$SS_{LS}^{(3)} \le SS_{LS}^{(2)}. \tag{3.13.17}$$

С другой стороны существуют такие оценки параметров модели (3.13.8), что

$$SS^{(2)} = SS_{LS}^{(3)} \tag{3.13.18}$$

Действительно, положим

$$\hat{\hat{b}}_0^{(2)} = \hat{b}_0^{(3)} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\hat{b}_{i0}^{(3)} + \dots + \hat{b}_{i\,(s_{i-1})}^{(3)}}{s_i},$$

$$\hat{\hat{b}}_{i0}^{(2)} = \frac{\left[(\mathrm{s}_i - 1)\hat{b}_{i0}^{(3)} - \hat{b}_{i1}^{(3)} - \dots - \hat{b}_{i\,(s_i-1)}^{(3)}\right]}{s_i}, \tag{3.13.19}$$

. . . .

$$\hat{\hat{b}}_{i\,(s_i-2)}^{(2)} = \frac{\left[-\hat{b}_{i0}^{(3)} - \dots + (\mathrm{s}_i - 1)\hat{b}_{i\,(s_i-2)}^{(3)} - \hat{b}_{i\,(s_i-1)}^{(3)}\right]}{s_i}$$

$(i = 1, \dots, n)$,

а для остальных оценок $\hat{\hat{b}}^{(2)}$ положим

$$\hat{\hat{b}}^{(2)} = \hat{b}^{(3)}. \tag{3.13.20}$$

Здесь также легко проверить, что для оценок (3.13.19) и (3.13.20) справедливо равенство (3.13.18). Поэтому

$$SS_{LS}^{(2)} \le SS_{LS}^{(3)}. \tag{3.13.21}$$

Сравнивая (3.13.17) и (3.13.21), получим равенство (3.13.13), что и требовалось.

Замечание к теореме 3.13.1. М.н.к.-оценки параметров третьей регрессионной задачи также можно, очевидно, получить по теореме 3.13.1, если использовать вместо матрицы $\mathbf{X_0}$ матрицу $M\mathbf{X_0}$ (M – любое положительное число). Однако в последнем случае матрица

$$(\mathbf{X}^{(3)T}\mathbf{X}^{(3)})^{-1}\sigma^2$$

будет сходиться (поэлементно) к ковариационной матрице вектора м.н.к.-оценок параметров (при $M \to \infty$).

Пример 3.13.1. Рассмотрим план

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \end{array}$$

для одного качественного фактора F и модели главных эффектов

$$Ey = b_0 + b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11}, \tag{3.13.22}$$

где

$$x_{10} = \begin{cases} 0, \text{если фактор F принимает значение } 0, \\ 1, \text{если фактор } F \text{ принимает значение } 1. \end{cases}$$

$$x_{11} = \begin{cases} 1, \text{если фактор } F \text{ принимает значение } 0, \\ 0, \text{если фактор } F \text{ принимает значение } 1. \end{cases}$$

Факторное равенство на параметры есть

$$b_{10} + b_{11} = 0.$$

Тогда матрица коэффициентов плана **D** для модели (3.13.22) есть

$$\mathbf{X}^{(1)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Используя первый метод, получим в качестве матрицы **A**:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда ковариационная матрица м.н.к.-оценок параметров есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{X}^{(1)T}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}\sigma^2 = \left\| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\| \sigma^2. \tag{3.13.23}$$

Используя второй метод, получим

$$M\mathbf{X}_0 = M\|0 \quad 1 \quad 1\|.$$

Тогда

$$(\mathbf{X}^{(3)T}\mathbf{X}^{(3)})^{-1}\sigma^2 = \begin{Vmatrix} \frac{1+2M^2}{4M^2} & -\frac{1}{4M^2} & -\frac{1}{4M^2} \\ -\frac{1}{4M^2} & \frac{1+2M^2}{4M^2} & \frac{1-2M^2}{4M^2} \\ -\frac{1}{4M^2} & \frac{1-2M^2}{4M^2} & \frac{1+2M^2}{4M^2} \end{Vmatrix} \sigma^2. \qquad (3.13.24)$$

При $M \to \infty$ матрица (3.13.24) сходится поэлементно к матрице (3.13.23).

§ 14. Разбиение на блоки

Задача разбиения факторного плана на блоки возникает в следующей ситуации. Пусть план **D** для факторной модели

$$E\mathbf{y} = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{f}(X_1, \dots, X_m)$$

с возможными ограничениями на параметры $\mathbf{T\Theta} = \mathbf{0}$ содержит N опытов. При этом может оказаться так, что все N опытов не могут быть реализованы в однородных условиях. Например, если однородной партии сырья (в химическом эксперименте) хватает только на n опытов $(n < N)$, если однородные участки земли невелики (в сельскохозяйственном эксперименте) и т. п. В таких случаях мы имеем дело по существу с еще одним фактором F, который называется блоковым и который может повлиять на результаты эксперимента, хотя сам по себе он не представляет особого интереса. Число уровней этого фактора равно числу неоднородных партий сырья, участков и т. п. Ситуация тогда, как правило, может быть описана при помощи следующей модели:

$$E\mathbf{y} = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{f}(X_1, \dots, X_m) + \sum_{i=1}^{r} \beta^{(i)} x^{(i)} \qquad (3.14.1)$$

с ограничениями на параметры

$$\mathbf{T\Theta} = \mathbf{0}, \ \sum_{i=1}^{r} \beta^{(i)} = 0,$$

где $\beta^{(i)}$ – эффект i-го уровня блокового фактора F и

$$x^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{для } i\text{-го уровня блокового фактора F}, \\ 0 & \text{для уровня, отличного от } i\text{-го}. \end{cases}$$

Эта модель, очевидно, также является факторной для плана $\mathbf{D}'$, содержащего все факторы плана **D** и блоковый фактор F (при условии, что все факторы плана $\mathbf{D}'$, кроме F, имеют соответственно столько же уровней, сколько имеют факторы плана **D**).

Пусть $\mathbf{X}'$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}'$ для модели (3.14.1). Вычеркнем из $\mathbf{X}'$ столбцы, отвечающие блоковому фактору *F,* и обозначим полученную матрицу через $\mathbf{X}$. Будем говорить о разбиении плана $\mathbf{D}'$ на ортогональные блоки в том случае, когда любой главный эффект фактора F ортогонален любому столбцу матрицы $\mathbf{X}$.

Будем далее рассматривать задачу разбиения планирования на блоки (в частности, на ортогональные блоки) параллельно с задачей построения эффективных факторных планов.

Литература

1. Бродский В.З. (1975). Факторные эксперименты: модели, планы, оптимальность. В сб. *«Планирование оптимальных экспериментов»*. Изд-во МГУ.

2. Бродский В.З. (1971). *Об ортогональных планах*. Изд-во МГУ.

3. Plackett, R.L. (1946). Some generalizations in the multifactorial design. *Biometrika*, **33**, 328–332.

4. Scheffé, H. (1959). *The analysis of variance*. Oxford, England: Wiley.

5. Бродский В.З., Бродский Л.И., Смирягина Т.Г. (1978). Об одном способе *G*–обращения в факторных экспериментах. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента. Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 24-30.

Глава 4. Эффективность планирования

При заданном плане эксперимента оценки метода наименьших квадратов обладают рядом оптимальных свойств. Далее будем считать метод обработки фиксированным (метод наименьших квадратов) и поставим задачу отыскания для различных моделей эффективных экспериментальных планов. Будем различать два вида понятий эффективности планирования: критерии оптимальности и желательные свойства плана. Между этими понятиями нет четкой границы. Однако охарактеризовать эти два вида можно следующим образом.

Под критериями оптимальности планирования будем понимать четкие (с математической точки зрения) требования к плану эксперимента. Эти требования в большинстве случаев можно рассматривать как естественное расширение концепции наилучших линейных оценок. Под желательными свойствами плана будем понимать свойства не очень четкие с точки зрения математика, но естественные для исследователя, занимающегося прикладными вопросами, связанными с экспериментом.

Будем считать, что рассматриваемые планы невырождены. Вследствие теоремы 3.12.1 невырожденность плана не зависит от типа факторной модели для факторного множества Ω. Поэтому будем различать типы невырожденных планов для произвольной факторной модели для множества Ω в соответствии со следующим определением.

Определение 4.0.1. Невырожденный план для факторной модели для факторного множества Ω, содержащего все возможные элементы из n факторов $(n \leq r-1)$, называется планом разрешающей способности $2r-1$. Невырожденный план для факторной модели для множества Ω, содержащего все возможные элементы из n факторов $(n \leq r-1)$, называется планом разрешающей способности $2r$, если все эффекты множества Ω оцениваются несмещенно в модели для множества Ω', включающего все возможные элементы из l факторов $(l \leq r)$. План разрешающей способности 3 будем называть также планом главных эффектов, а соответствующую ему модель – моделью главных эффектов.

§ 1. Критерии оптимальности планирования

Если для модели (2.1.3) и для плана (2.1.4) информационная матрица плана $\mathbf{M}$ – матрица полного ранга, то ковариационная матрица вектора $\widehat{\mathbf{\Theta}}$ оценок параметров есть

$$\mathbf{\Gamma}(\widehat{\mathbf{\Theta}}) = \mathbf{M}^{-1}\sigma^2.$$

Матрицы $\overline{\mathbf{M}} = \frac{1}{N}\mathbf{M}$ и $\overline{\mathbf{\Gamma}} = \overline{\mathbf{M}}^{-1}\sigma^2$ называются соответственно нормированной информационной и нормированной ковариационной.

Первые три критерия оптимальности, которые будут введены для модели без ограничений на параметры, допускают удобную интерпретацию, связанную с размерами эллипсоида рассеяния оценок параметров.

Определение 4.1.1. План $\mathbf{D}^*$ называется *D*-оптимальным на множестве планов $\mathcal{D}$, если

$$\det \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{D}^*) = \max_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \det \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{D}). \tag{4.1.1}$$

Эллипсоид рассеяния оценок параметров *D*-оптимального плана имеет минимальный объем.

Критерий *D*-оптимальности (называемый также критерием Муда) – наиболее распространенный критерий. Он будет использован также и для модели (2.1.5) с ограничениями на параметры (2.6.1). В этом случае в выражении (4.1.1) под $\mathbf{M}$ будем понимать информационную матрицу $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{Q}$ для редуцированной модели (2.4.3). Свойство *D*-оптимальности плана инвариантно при невырожденных линейных преобразованиях вектора параметров модели. Пользуясь этим, можно показать, что свойство *D*-оптимальности плана инвариантно по отношению к выбору вектора новых параметров $\mathbf{Q}_n$ при редуцировании модели.

Определение 4.1.2. План $\mathbf{D}^*$ называется *A*-оптимальным на множестве планов $\mathcal{D}$, если

$$\operatorname{Tr} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{D}^*) = \min_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \operatorname{Tr} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{D}). \tag{4.1.2}$$

Эллипсоид рассеяния, соответствующий *A*-оптимальному плану, имеет минимальную длину диагонали параллелепипеда, описанного вокруг этого эллипсоида.

Критерий *A*-оптимальности носит также название критерия Кишена.

Определение 4.1.3. План $\mathbf{D}^*$ называется *E*-оптимальным на множестве планов $\mathcal{D}$, если

$$\max_q q\{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{D}^*)\} = \min_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \max_q q\{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{D})\}, \tag{4.1.3}$$

где $q\{\mathbf{\Gamma}\}$ – собственное значение матрицы $\mathbf{\Gamma}$.

E-оптимальный план обращает в минимум максимальную ось эллипсоида рассеяния.

Критерий E-оптимальности носит также название критерия Эренфельда.

Следующие два критерия связаны со свойствами дисперсионной функции м.н.к.-оценок в исследуемой области.

Определение 4.1.4. План $\mathbf{D}^*$ называется G-оптимальным в области Z на множестве планов $\mathcal{D}$, если

$$\max_Z N^* d(\mathbf{D}^*, X_1, \dots, X_m) = \min_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \max_Z Nd(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m), \qquad (4.1.4)$$

где $d(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m)$ – дисперсия оценки регрессионной функции в точке $(X_1, \dots, X_m) \in Z$.

Будем называть средней дисперсией по области Z величину [1]

$$\bar{d}(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m) = \int \underset{Z}{\cdots} \int d(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m) dX_1 \dots dX_m.$$

Определение 4.1.5. План $\mathbf{D}^*$ называется Q-оптимальным в области Z на множестве планов $\mathbf{D}$, если

$$\bar{d}(\mathbf{D}^*, X_1, \ \dots, \ X_m) = \min_{\mathbf{D}\in\mathcal{D}} \bar{d}(\mathbf{D}, X_1, \ \dots, \ X_m). \qquad (4.1.5)$$

Следующие два критерия (ортогональности и регулярности) часто будут использоваться в книге, хотя, на первый взгляд, они могут показаться не такими естественными со статистической точки зрения, как предыдущие. В конце этой главы будет дано обоснование широкой применимости этих критериев.

Определение 4.1.6. План называется ортогональным для некоторой модели, если ковариационная матрица вектора оценок параметров для этой модели и для данного плана имеет диагональный вид.

Определение 4.1.7. Факторный план называется регулярным мощности t, если выполняется условие пропорциональности частот для любых t факторов.

Следующая теорема есть следствие теоремы 3.7.3.

Теорема 4.1.1. Регулярный факторный план мощности $t = 2n$ дает возможность получить множество попарно ортогональных главных эффектов и эффектов взаимодействии: вплоть до n-факторных включительно. Регулярный факторный план мощности $t = 2n + 1$ позволяет получить множество попарно ортогональных главных эффектов и эффектов взаимодействия вплоть до n-факторных включительно, каждый из которых ортогонален также ко всем $(n + 1)$-факторным эффектам взаимодействия.

---

[1] Для дискретной области Z из N точек

$$\bar{d}(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m) = 1/N \sum_Z d\,(\mathbf{D}, X_1, \dots, X_m).$$

Из теоремы 4.1.1 следует, что регулярный факторный план мощности t есть частный случай плана разрешающей способности $t+1$.

Определение 4.1.8. Назовем факторный план регулярным для факторного множества Ω, если существует факторная модель для множества Ω, для которой этот план ортогонален.

Из определения 4.1.8 следует, что регулярный факторный план мощности $t = 2n$ есть частный случай регулярного факторного плана для множества Ω, содержащего все возможные элементы из n и менее факторов.

Регулярность плана для факторного множества Ω не означает ортогональности плана для произвольной модели для множества Ω.

Теорема 4.1.2. Следующие три условия эквивалентны:

1) план **D** регулярен для факторного множества Ω;

2) для плана **D** все главные эффекты и эффекты взаимодействия, отвечающие факторному множеству Ω (по одному от каждого множества эффектов), попарно ортогональны;

3) в плане **D** выполняется условие пропорциональности частот для факторного множества Ω.

Доказательство. Эквивалентность условий 2 и 3 следует из теорем 3.7.2 и 3.7.3. Докажем теперь, что условие 1 влечет за собой условие 2. Действительно, при выполнении условия 1 матрица коэффициентов **X** будет иметь ортогональные столбцы. Поэтому столбцы, соответствующие функциям

$$f_1^{(1)}(X_1), \dots, f_1^{(s_1-1)}(X_1), \dots, f_m^{(1)}(X_m), \dots, f_m^{(s_m-1)}(X_m),$$

будут ортогональны единичному столбцу и, следовательно, будут представлять собой главные эффекты факторов $F_1, \dots, F_m$.

Столбец $\mathbf{f}_{i_1 \dots i_n}$, соответствующий произведению $f_{i_1}^{(j_1)}\left(X_{i_1}\right) \times \dots \times f_{i_n}^{(j_n)}\left(X_{i_n}\right)$, имеет равные элементы для одинаковых комбинаций уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$. Отсюда и из условия 1 легко показать, что этот столбец будет ортогонален всем главным эффектам факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ и всем эффектам взаимодействия этих факторов порядка $l < n-1$. Поэтому столбец $\mathbf{f}_{i_1 \dots i_n}$ есть эффект взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$. Таким образом, условие 2 выполняется.

Условие 2 влечет за собой условие 1. Действительно, это следует из теоремы 3.8.2.

Таким образом, теорема доказана.

Не всегда удается построить план, удовлетворяющий всем или даже нескольким критериям оптимальности. Поэтому теоретическую и практическую ценность представляют собой планы, построенные даже на основании одного критерия оптимальности.

§ 2. Желательные свойства планов

Из желательных свойств плана в первую очередь остановимся на свойстве, относящемся к числу экспериментов. Оно чрезвычайно важно для тех, кто участвует в экспериментальной работе.

Определение 4.2.1. План называется насыщенным для факторной модели множества Ω, если число опытов плана равно числу параметров A^{Ω}-модели.

Мы также будем использовать определение 4.2.1 и для моделей, которые включают качественные факторы (с ограничениями на параметры). В этом случае надо уменьшить число параметров в определении 4.2.1 на число линейно независимых ограничений.

Среди других желательных свойств плана отметим следующие два:

- простота вычислений и интерпретации результатов наблюдений;

- возможность разбить планирование на блоки в тех случаях, когда нельзя весь эксперимент провести в однородных условиях.

В последующих главах будут рассмотрены вопросы построения оптимальных планов, обладающих желательными свойствами.

§ 3. Эквивалентность *D*- и *G*-оптимальных планов

Пусть **D** – множество всех планов с ограниченной замкнутой областью измерений *Z*. Тогда справедлива следующая теорема эквивалентности Кифера и Вольфовица.

Теорема 4.3.1 [1]. Следующие утверждения эквивалентны:

1) план $\mathbf{D}^*$ *D*-оптимален на **D**;

2) план $\mathbf{D}^*$ *G*-оптимален на **D**;

3) $\max\limits_{Z} N^* d(\mathbf{D}^*, X_1, \dots, X_m) = k$.

Теорема 4.3.2 [1]. Информационная матрица *D-(G-)*оптимального плана на **D** единственна. В точках *D-(G-)*оптимального плана достигается максимум дисперсии оценки регрессионной функции на *Z*.

Теорема 4.3.1 перестает, вообще говоря, быть справедливой, если в качестве **D** рассматривать некоторое подмножество всех планов. Так, не будут эквивалентны *D*- и *G*-оптимальные планы на множестве планов с фиксированным числом наблюдений. Ни для *D*-оптимального, ни для *G*-оптимального плана не будет выполняться утверждение 3 теоремы 4.3.1.

§ 4. Критерий средней дисперсии

Пусть **D** – факторный план, построенный для A^{Ω}-модели (3.2.4). Вследствие (2.2.5) дисперсия оценки регрессионной функции в точке

$$\mathbf{x}^T = \Big[1, f_1^{(1)}(X_1), \dots, f_1^{(s_1-1)}(X_1), \dots, k_{i_1 i_2}^{1,1} f_{i_1}^{(1)}\big(X_{i_1}\big) f_{i_2}^{(1)}\big(X_{i_2}\big),$$
$$\dots, k_{i_1 i_2}^{s_{i_1}-1, s_{i_2}-1} f_{i_1}^{(s_{i_1}-1)}\big(X_{i_1}\big) f_{i_2}^{(s_{i_2}-1)}\big(X_{i_2}\big), \dots\Big] = \{\mathbf{x}^T(X_1, \dots, X_m)\}$$

равна

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma^2 \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}.$$

По теореме 3.4.1 и замечанию 2 к ней функции в A^Ω-модели (3.2.4) могут быть выбраны так, что

$$\textstyle\sum_{u=1}^{N^f} x_u^{(j)} x_u^{(l)} = N^f \delta_{jl}, \tag{4.4.1}$$

где $\{x_u^{(n)}\} = \mathbf{x}^T(X_{1u}, \dots, X_{mu}); \quad n = j, l.$

Тогда средняя по области $\mathbf{D}^f$ дисперсия

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 / N^f \textstyle\sum_{x \in \mathbf{D}^f} \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}$$
$$= \sigma^2 / N^f \textstyle\sum_{u=1}^{N^f} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} x_u^{(j)} x_u^{(l)} c_{jl}$$
$$= \sigma^2 / N^f \textstyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} c_{jl} \sum_{u=1}^{N^f} x_u^{(j)} x_u^{(l)}$$
$$= \sigma^2 \textstyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} c_{jl} \delta_{jl} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} c_{jj} = \sigma^2 \mathrm{Tr}\{(\mathbf{X}^T \boldsymbol{X})^{-1}\},$$

где k – число параметров в модели, и $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \{c_{jl}\}$. Из результатов §12 главы 3 следует, что дисперсия оценки регрессионной функции не зависит от вида модели для множества Ω и от выбора функций в этой модели. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.4.1. Факторный план Q-оптимален на $\mathbf{D}^f$ для произвольной модели для множества Ω тогда и только тогда, когда он A-оптимален для A^Ω-модели, удовлетворяющей условию (4.4.1).

Теорема 4.4.1 может быть также получена как следствие теоремы 2.12.1 книги В.В.Федорова [2].

Пусть уровни $0, 1, \dots, (s_i - 1)$ фактора F_i появляются в плане $\mathbf{D}$ $n_i^{(0)}, n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(s_i-1)}$ раз соответственно. В этом случае, очевидно,

$$\textstyle\sum_{j=0}^{s_i-1} n_i^{(j)} = N.$$

Определение 4.4.1. Значение

$$U_i^{j_i} = \frac{N - n_i^{(j_i)}}{n_i^{(j_i)}(s_i - 1)} \tag{4.4.2}$$

называется коэффициентом равномерности j_i-го уровня фактора F_i.

Очевидно, что если j_i-й уровень фактора F_i появляется в плане **D** более N/s_i раз, то $U_i^{j_i} < 1$, менее N/s_i раз, то $U_i^{j_i} > 1$, и, наконец, когда j_i-й уровень фактора F_i появляется в плане ровно N/s_i раз, $U_i^{j_i} = 1$.

Последнее соотношение сохраняется, в частности, для равномерных планов для любого уровня любого фактора.

Определение 4.4.2. Среднее значений $U_i^{j_i}$ по всем уровням фактора F_i

$$U_i = \sum_{j_i=0}^{s_i-1} \frac{U_i^{j_i}}{s_i} = \frac{N\sum_{j=0}^{s_i-1}\left(1/n_i^{(j_i)} - s_i\right)}{s_i(s_i-1)} \tag{4.4.3}$$

называется коэффициентом равномерности фактора F_i.

Определение 4.4.3. Фактор называется равномерным, если каждый его уровень появляется в плане одинаковое число раз. В противном случае фактор называется неравномерным.

Очевидно, что для равномерных факторов $U_i = 1$, для неравномерных факторов $U_i > 1$.

Рассмотрим регулярный план **D** главных эффектов для факторов $F_1, \dots, F_m$, то есть регулярный план для множества Ω, состоящего только из факторов $F_1, \dots, F_m$. Тогда функции в модели

$$\begin{aligned} Ey = b_0 + b_1^{(1)} f_1^{(1)}(X_1) + \dots + b_1^{(s_1-1)} f_1^{(s_1-1)}(X_1) + \\ \dots + b_m^{(1)} f_m^{(1)}(X_m) + \dots + b_m^{(s_m-1)} f_m^{(s_m-1)}(X_m) \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

могут быть подобраны таким образом, чтобы план **D** был ортогонален для этой модели.

Пусть значения функций $f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ в точках плана **D** образуют матрицу главных эффектов $\mathbf{F}_i$ фактора F_i (§3 главы 3). Таким образом, матрица коэффициентов **X** плана **D** для модели (4.4.4) имеет вид

$$\mathbf{X} = \|\ \mathbf{I}, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_m\ \|.$$

Все столбцы **X** попарно ортогональны и скалярный квадрат любого из них равен N.

Ковариационная матрица вектора оценок параметров модели (4.4.4) есть

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}\mathbf{E}_k \quad \left(k = \sum_{i=1}^{m}(s_i - 1) + 1\right). \tag{4.4.5}$$

Пусть $\mathbf{x}(j_1, \dots, j_m) = \left[1, f_1^{(1)}\left(X_1^{j_1}\right), \dots, f_1^{(s_1-1)}\left(X_1^{(j_1)}\right), \dots, f_m^{(1)}\left(X_m^{j_m}\right), \dots, f_m^{(s_m-1)}\left(X_m^{(j_m)}\right)\right]$ – вектор функций, отвечающий уровням $j_1, \dots, j_m$ факторов $F_1, \dots, F_m$ соответственно. Дисперсия в этой точке

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{x}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}\mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

Нормированная (приведенная к одному наблюдению) дисперсия в этой точке $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$.

Рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_i \ \| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_i^{0^T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^{0^T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^{s_i-1^T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^{s_i-1^T} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{c}_i^{0^T} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{c}_i^{0^T} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{c}_i^{s_i-1^T} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{c}_i^{s_i-1^T} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} n_i^{(0)} \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} n_i^{(s_i-1)} \end{matrix} .$$

Тогда

$$\boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i = N \mathbf{E}_{s_i}. \tag{4.4.6}$$

Введем теперь матрицу

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_i = \left\| \begin{matrix} \sqrt{n_i^{(0)}} \mathbf{a}_i^{0^T} \\ \vdots \\ \sqrt{n_i^{(s_i-1)}} \mathbf{a}_i^{s_i-1^T} \end{matrix} \right\|.$$

$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_i$ – квадратная матрица порядка s_i, и вследствие равенства (4.4.6)

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_i = N \mathbf{E}_{s_i}.$$

Поэтому

$$\mathbf{a}_i^{j_i T} \mathbf{a}_i^{j_i} = \frac{N}{n_i^{(j_i)}}, \quad \mathbf{c}_i^{j_i T} \mathbf{c}_i^{j_i} = \frac{N}{n_i^{(j_i)}} - 1. \tag{4.4.7}$$

Вследствие равенств (4.4.2) и (4.4.7) получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2}{\sigma^2} &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1 + \mathbf{c}_1^{j_1 \mathrm{T}} \mathbf{c}_1^{j_1} + \dots + \mathbf{c}_m^{j_m \mathrm{T}} \mathbf{c}_m^{j_m} \\ &= 1 + \left(\frac{N}{n_1^{(j_1)}} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{N}{n_m^{(j_m)}} - 1 \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^m (s_i - 1) \ U_i^{j_i}. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Таким образом, нормированная дисперсия в любой точке $\mathbf{x}(j_1, \dots, j_m)$ множества $\mathbf{D}^f$ может быть выражена через коэффициенты равномерностей уровней $j_1, \dots, j_m$ факторов $F_1, \dots, F_m$ соответственно.

Вычислим сумму нормированных дисперсий по всем точкам множества $\mathbf{D}^f$:

$$\sigma^2\left\{\sum\nolimits_{\mathbf{D}^f}\left(\frac{N}{n_1^{(j_1)}}-1\right)+\cdots+\sum\nolimits_{\mathbf{D}^f}\left(\frac{N}{n_m^{(j_m)}}-1\right)+s_1\ldots s_m\right\}$$

$$=\sigma^2\left\{s_2\ldots s_m\sum\nolimits_{j_1=0}^{s_1-1}\left(\frac{N}{n_1^{(j_1)}}-1\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+s_1\ldots s_{m-1}\sum\nolimits_{j_m=0}^{s_m-1}\left(\frac{N}{n_m^{(j_m)}}-1\right)+s_1\ldots s_m\right\}.$$

Средняя по точкам $\mathbf{D}^f$ нормированная дисперсия

$$\bar{\sigma}_a^2=\sigma^2\sum\nolimits_{\mathbf{D}^f}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}{s_1\ldots s_m}=\sigma^2\left\{\frac{1}{s_1}\sum\nolimits_{j_1=0}^{s_1-1}\left(\frac{N}{n_1^{(j_1)}}-1\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s_m}\sum\nolimits_{j_m=0}^{s_m-1}\left(\frac{N}{n_m^{(j_m)}}-1\right)+1\right\}. \quad (4.4.9)$$

Обозначим

$$A_i=\frac{\sigma^2}{s_i}N\left(\sum\nolimits_{j_i=0}^{s_i-1}\frac{1}{n_i^{(j_i)}}-s_i\right)$$

и назовем A_i средней (по точкам $\mathbf{D}^f$) нормированной (приведенной к одному наблюдению) дисперсией для фактора F_i. Тогда из равенства (4.4.9) следует, что

$$\bar{\sigma}_a^2=\sigma^2\sum\nolimits_{\mathbf{D}^f}\mathbf{x}^T\mathbf{x}/(s_1\ldots s_m)=1+\sum\nolimits_{i=1}^m A_i.$$

Очевидно, что

$$A_i=(s_i-1)U_i\sigma^2.$$

Таким образом,

$$\bar{\sigma}_a^2=\sigma^2\{1+\sum\nolimits_{i=1}^m(s_i-1)U_i\}, \quad (4.4.10)$$

то есть средняя нормированная дисперсия выражается через коэффициенты равномерности факторов.

В равномерных регулярных планах $U_i=1\quad(i=1,\ldots,m)$, поэтому для них

$$\bar{\sigma}_a^2=\sigma^2\{1+\sum\nolimits_{i=1}^m(s_i-1)\}=k\sigma^2.$$

В неравномерных регулярных планах $U_i>1$ для некоторых значений i, поэтому для них $\bar{\sigma}_a^2>k\sigma^2$.

Рассмотрим регулярный план D по отношению к факторной модели для факторного множества Ω.

Пусть

$$\mathbf{x}(j_1, \dots, j_m) = \Big[1, f_1^{(1)}\left(X_1^{(j_1)}\right), \dots, f_1^{(s_1-1)}\left(X_1^{(j_1)}\right), \dots, f_m^{(1)}\left(X_m^{(j_m)}\right), \dots,$$
$$f_m^{(s_m-1)}\left(X_m^{(j_m)}\right), f_{i_1}^{(1)}\left(X_{i_1}^{(j_{i_1})}\right) f_{i_2}^{(1)}\left(X_{i_2}^{(j_{i_2})}\right), \dots,$$
$$f_{i_1}^{(s_{i_1}-1)}\left(X_{i_1}^{(j_{i_1})}\right) f_{i_2}^{(s_{i_2}-1)}\left(X_{i_2}^{(j_{i_2})}\right), \dots \Big]^T.$$

Тогда, как и ранее, имеем

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}\mathbf{x}^T\mathbf{x}. \qquad (4.4.11)$$

Аналогично выражению (4.4.8) получим, что

$$\bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2 = \sigma^2\left\{1 + \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i^{j_i T}\mathbf{c}_i^{j_i} + \sum_{i_1,i_2}\left(\mathbf{c}_{i_1}^{j_{i_1}} \otimes \mathbf{c}_{i_2}^{j_{i_2}}\right)^T\left(\mathbf{c}_{i_1}^{j_{i_1}} \otimes \mathbf{c}_{i_2}^{j_{i_2}}\right) + \cdots\right\}$$
$$= \sigma^2\left\{1 + \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i^{j_i T}\mathbf{c}_i^{j_i} + \sum_{i_1,i_2}\left(\mathbf{c}_{i_1}^{j_{i_1} T}\mathbf{c}_{i_2}^{j_{i_2}}\right)\left(\mathbf{c}_{i_2}^{j_{i_2} T}\mathbf{c}_{i_2}^{j_{i_2}}\right) + \cdots\right\} \qquad (4.4.12)$$
$$= \sigma^2\left\{1 + \sum_{i=1}^m (s_i - 1)U_i^{j_i} + \sum_{i_1,i_2}(s_{i_1} - 1)(s_{i_2} - 1)U_{i_1}^{j_{i_1}}U_{i_2}^{j_{i_2}} + \cdots\right\}.$$

Аналогично равенству (4.4.9) можно вычислить для рассматриваемого случая регулярного факторного плана для множества Ω среднюю нормированную дисперсию по множеству $\mathbf{D}^f$:

$$\bar{\sigma}_a^2 = \sigma^2\{1 + \frac{1}{s_1}\sum_{j_1=0}^{s_1-1}\left(\frac{N}{n_1^{(j_1)}} - 1\right) + \cdots + \frac{1}{s_m}\sum_{j_m=0}^{s_m-1}\left(\frac{N}{n_m^{(j_m)}} - 1\right)$$
$$+ \sum_{i_1,i_2}\frac{1}{s_{i_1}s_{i_2}}\sum_{j_{i_1}=0}^{s_{i_1}-1}\left(\frac{N}{n_{i_1}^{(j_{i_1})}} - 1\right)\sum_{j_{i_2}=0}^{s_{i_2}-1}\left(\frac{N}{n_{i_2}^{(j_{i_2})}} - 1\right) + \cdots\Bigg\}.$$

С учетом (4.4.3)

$$\bar{\sigma}_a^2 = \sigma^2\left\{1 + \sum_{i=1}^m (s_i - 1)U_i + \sum_{i_1,i_2}(s_{i_1} - 1)(s_{i_2} - 1)U_{i_1}U_{i_2} + \cdots\right\}$$

Очевидно, что в равномерных регулярных планах $\bar{\sigma}_a^2 = \sigma^2 k$, где k – число параметров модели; для неравномерных регулярных планов $\bar{\sigma}_a^2 > \sigma^2 k$.

Рассмотрим функцию эффективности, связанную с критерием средней дисперсии и представляемую в виде

$$\varphi = \frac{k\sigma^2}{\bar{\sigma}_a^2}.$$

Тогда для равномерных регулярных планов $\varphi = 1$. Для неравномерных регулярных планов $\varphi < 1$. Таким образом,

$$\varphi \le 1. \qquad (4.4.13)$$

Поэтому эффективность, связанную с критерием средней дисперсии, имеет смысл выражать величиной $\varphi 100\%$.

Подчеркнем, что неравенство (4.4.13) справедливо только для факторных моделей и планов (как они определены в этой книге). В связи с последним замечанием приведем следующий пример.

Пример 4.4.1. В области

$$0 \leq X_i \leq 1 \ (i = 1, 2, 3)$$

рассмотрим план эксперимента

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ \end{array}$$
$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|$$

для модели

$$Ey = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3. \qquad (4.4.14)$$

Этот план, как легко проверить, является D-оптимальным. Отсутствие свободного члена в модели (4.4.14) делает ее «нефакторной». И, следовательно, выполнения неравенства (4.4.13) уже не следует ожидать. Подсчитаем теперь дисперсии оценок регрессионной функции (отнесенные к σ^2) в восьми точках области $\mathbf{D}^f$. Они будут 1, 1, 1, 3/4, 3/4, 3/4, 3/4, 0. Средняя дисперсия (отнесенная к σ^2) равна 6/8. Поэтому эффективность плана равна 133%.

§ 5. *D*-оптимальность регулярных факторных планов

В настоящем параграфе получим условия, при которых регулярные факторные планы обладают свойством D-оптимальности [3], а также укажем на связь с другими критериями оптимальности.

Рассмотрим сначала регулярный план $\mathbf{D}$ главных эффектов для модели (4.4.4). Из равенства (4.4.8) следует, что в случае равномерного плана нормированная дисперсия в любой точке $\mathbf{x}$ (в частности, в любой точке плана $\mathbf{D}$) равна числу оцениваемых параметров

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{m} (s_i - 1),$$

то есть максимум нормированной дисперсии по области $\mathbf{D}^f$ будет достигаться в точках плана $\mathbf{D}$. Таким образом, план $\mathbf{D}$ будет D-оптимальным в области $\mathbf{D}^f$.

Пусть в плане $\mathbf{D}$ хотя бы один фактор, скажем F_1, неравномерен. Выберем тогда для каждого фактора уровень с максимальным коэффициентом равномерности. Пусть эти уровни будут $j_1, \dots, j_m$. Поскольку

$$U_1^{j_1} > 1, \quad U_i^{j_i} \geq 1 \quad (i = 2, \dots, m),$$

из равенств (4.4.8) следует, что $\bar{\sigma}^2_{\mathbf{x}(j_1,\dots,j_m)} > k\sigma^2$. И, следовательно, неравномерный регулярный план не может быть в этом случае *D*-оптимальным для модели (4.4.4.) даже на множестве $\mathbf{D}^f$. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 4.5.1. Регулярный факторный план главных эффектов *D*-оптимален для модели (4.4.4) на множестве $\mathbf{D}^f$ тогда и только тогда, когда он равномерен.

Пусть функции $f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ в модели (4.4.4) образуют систему ортогональных полиномов от X_i в точках плана **D** таких, что выполняется равенство (4.4.5). Минимальное и максимальное значения, которые принимает переменная X_i, обозначим через a_i и b_i соответственно. Свойство *D*-оптимальности плана на множестве $\mathbf{D}^f$, обусловливаемое теоремой 4.5.1, будет сохранено при любом выборе значений X_i для каждого из уровней фактора F_i. Представляет интерес такой выбор этих значений, чтобы полученный план был оптимален на кубе $a_i \leq X_i \leq b_i$. Без ограничения общности далее мы будем рассматривать план на кубе $-1 \leq X_i \leq 1$.

Пусть **D-** регулярный равномерный план для количественных факторов $F_1, \dots, F_m$ для модели главных эффектов. Пусть s_i значений $X_i^{(0)}, \dots, X_i^{(s_i-1)}$, которые принимает переменная X_i в плане **D**, будут следующими: концы интервала $[-1, 1]$ и корни производной $(s_i - 1)$-го полинома Лежандра. В этом случае, как известно [4, 5], одномерный план на отрезке $[-1, 1]$ состоящий из этих s_i точек, является *D*-оптимальным для модели

$$Ey = b_0 + b_i^{(1)} f_i^{(1)}(X_i) + \dots + b_i^{(s_i-1)} f_i^{(s_i-1)}(X_i).$$

Это означает, что

$$\max_{X_i \in [-1,+1]} \sum_{j=1}^{s_i-1} \left[f_i^{(j)}(X_i)\right]^2 = s_i - 1, \tag{4.5.1}$$

и этот максимум достигается на отрезке $[-1, 1]$ в точках $X_i^{(0)}, \dots, X_i^{(s_i-1)}$. Для плана **D** нормированная дисперсия в точке

$$\mathbf{x}^T = \left[1, f_1^{(1)}(X_1), \dots, f_1^{(s_1-1)}(X_1), \dots, f_m^{(1)}(X_m), \dots, f_m^{(s_m-1)}(X_m)\ \right]$$

вследствие соотношения (4.4.5) равна

$$\bar{\sigma}^2_{\mathbf{x}} = \left\{1 + \sum_{j=1}^{s_1-1} \left[f_1^{(j)}(X_1)\right]^2 + \dots + \sum_{j=1}^{s_m-1} \left[f_m^{(j)}(X_m)\right]^2\right\} \sigma^2.$$

С учетом равенства (4.5.1) получим, что

$$\max_{X_i \in [-1,+1]} \bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2 = \sigma^2\{1 + \sum_{i=1}^m (s_i - 1)\} = \sigma^2 k.$$

Поэтому план **D** будет D-оптимален. Этот план будет также D-оптимальным для модели, получаемой из модели (4.4.4) линейным преобразованием системы входящих в нее функций. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.5.2. Пусть в модели (4.4.4) $f_i^{(j)}(X_i)$ – полином степени j от X_i. Тогда план, имеющий структуру регулярного плана главных эффектов для факторов $F_1, \ldots, F_m$ на уровнях $s_1, \ldots, s_m$ соответственно, в котором переменные X_i. принимают s_i значений на концах интервала $[-1, +1]$ и в корнях производной $(s_i - 1)$-го полинома Лежандра, будет D -оптимальным для модели (4.4.4) на кубе $-1 \leq X_i \leq +1$ тогда и только тогда, когда он равномерен.

Пример 4.5.1. Рассмотрим модель

$$\begin{aligned} Ey &= \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_{11} x_1^2 + \theta_{111} x_1^3 \\ &+ \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 + \theta_4 x_4 + \theta_5 x_5. \end{aligned} \qquad (4.5.2)$$

Пользуясь критерием пропорциональности частот, легко показать, что план

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

– регулярный равномерный факторный план главных эффектов для одного четырехуровневого и четырех двухуровневых факторов. Следовательно, D-оптимальный план на единичном кубе для модели (4.5.2) есть

$$\mathbf{D}' = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1/\sqrt{5} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ +1/\sqrt{5} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ +1/\sqrt{5} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1/\sqrt{5} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Этот план изображен на рис. 2.

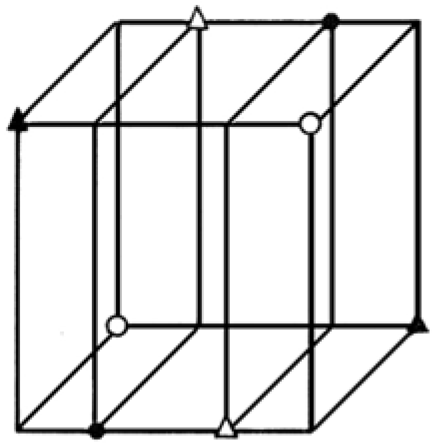


Рис 2. *D*-оптимальный план для модели (4.5.2)

По абсциссе отложены значения x_1, по ординате – значения x_2, по аппликате – значения x_3; кружки и треугольники означают, что x_4 принимает значения -1 и $+1$ соответственно; светлые и темные фигуры означают -1 и $+1$ для x_5 соответственно.

Рассмотрим теперь регулярный план **D** для факторного множества Ω по отношению к A^{Ω}- модели:

$$\begin{aligned} Ey = {} & b_0 + b_1^{(1)} f_1^{(1)}(X_1) + \cdots + b_1^{(s_1-1)} f_1^{(s_1-1)}(X_1) + \cdots \\ & + b_m^{(1)} f_m^{(1)}(X_m) + \cdots + b_m^{(s_m-1)} f_m^{(s_m-1)}(X_m) \\ & + \sum\nolimits_{i_1,i_2} \Big[b_{i_1 i_2}^{(1,1)} f_{i_1}^{(1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(1)}(X_{i_2}) + \cdots \\ & + b_{i_1 i_2}^{(s_{i_1}-1,\ s_{i_2}-1)} f_{i_1}^{(s_{i_1}-1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(s_{i_2}-1)}(X_{i_2}) \Big] + \cdots \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Из равенства (4.4.12) следует, что в случае равномерного плана нормированная дисперсия в любой точке $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^f$ (в частности, в любой точке плана **D**) равна числу оцениваемых параметров. И, таким образом, план **D** будет *D*-оптимальным в области $\mathbf{D}^f$. С другой стороны, вследствие равенства (4.4.12), когда хотя бы один фактор плана **D** неравномерен, найдется точка $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^f$, в которой нормированная дисперсия превышает число оцениваемых параметров. И, следовательно, неравномерный регулярный план не может быть *D*-оптимальным для модели (4.5.3) даже на множестве $\mathbf{D}^f$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.5.3. Регулярный факторный план для факторного множества Ω D-оптимален по отношению к факторной A^{Ω}-модели на множестве $\mathbf{D}^f$ тогда и только тогда, когда он равномерен.

Пусть система функций $f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ есть система ортогональных полиномов от X_i в точках плана $\mathbf{D}$. X_i может принимать значения внутри интервала $[-1, +1]$. Свойства D-оптимальности регулярного для факторного множества Ω плана на множестве $\mathbf{D}^f$ будет сохранено при любом выборе значений X_i для каждого из s_i уровней фактора. Будем искать такой набор этих значений, чтобы полученный план был D-оптимален на кубе $-1 \le X_i \le +1$.

Рассмотрим регулярный равномерный план для факторного множества Ω. Как и для случая плана главных эффектов будем считать, что s_i различных значений $X_i^{(0)}, \dots, X_i^{(s_i-1)}$, которые принимает переменная X_i в плане $\mathbf{D}$, есть концы интервала $[-1, +1]$ и корни производной $(s_i - 1)$-го полинома Лежандра на этом интервале.

Для плана $\mathbf{D}$ для модели (4.5.3) нормированная дисперсия в точке

$$\mathbf{x}^T = [1, f_1^{(1)}(X_1), \dots, f_1^{(s_1-1)}(X_1), \dots, f_m^{(1)}(X_m), \dots, f_m^{(s_m-1)}(X_m),$$
$$f_{i_1}^{(1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(1)}(X_{i_2}), \dots, f_{i_1}^{(s_{i_1}-1)}(X_{i_1}) f_{i_2}^{(s_{i_2}-1)}(X_{i_2})\Big]$$

вследствие равенства (4.4.11) равна

$$\bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2 = \sigma^2 \Big\{ 1 + \sum_{j=1}^{s_1-1} \left[f_1^{(j)}(X_1) \right]^2 + \dots + \sum_{j=1}^{s_m-1} \left[f_m^{(j)}(X_m) \right]^2$$
$$+ \sum_{i_1, i_2} \Big\{ \sum_{j=1}^{s_{i_1}-1} \left[f_{i_1}^{(j)}(X_{i_1}) \right]^2 \sum_{j=1}^{s_{i_2}-1} \left[f_{i_2}^{(j)}(X_{i_2}) \right]^2 \Big\} + \cdots \Big\}.$$

С учетом (4.5.1) получим

$$\max_{X_i \in [-1, +1]} \bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2$$
$$= \sigma^2 \{ 1 + \sum_{i=1}^{m} (s_i - 1) + \sum_{i_1, i_2} (s_{i_1} - 1)(s_{i_2} - 1) + \cdots \} = k\sigma^2.$$

Поэтому план $\mathbf{D}$ – D-оптимален. Этот план будет также D-оптимальным для модели, полученной из модели (4.5.3) линейным невырожденным преобразованием системы входящих в нее функций. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.5.4. Пусть в модели (4.5.3) $f_i^{(j)}(X_i)$ – полином степени j от X_i. Тогда план, имеющий структуру регулярного факторного плана для факторного множества Ω, в котором переменные X_i принимают s_i разлучных значений на концах интервала $[-1, +1]$ и в корнях производной

$(s_i - 1)$-го полинома Лежандра, будет D-оптимальным для модели (4.5.3) на кубе $-1 \leq X_i \leq +1$ тогда и только тогда, когда он равномерен.

Пусть $\mathbf{D}_i$ D-оптимальный план с равной мерой в s_i узлах на отрезке $[-1, 1]$ для модели

$$Ey = b_0 + b_i^{(1)} f_i^{(1)}(X_i) + \cdots + b_i^{(s_i-1)} f_i^{(s_i-1)}(X_i).$$

Следующая теорема является обобщением теоремы 4.5.4 и доказывается аналогичным образом.

Теорема 4.5.5. План **D**, имеющий структуру регулярного факторного плана для факторного множества Ω, в котором переменные X_i принимают s_i значений в узлах планов $\mathbf{D}_i$, будет D-оптимальным для модели (4.5.3) на кубе $-1 \leq X_i \leq +1$ тогда и только тогда, когда он равномерен.

Теорема 4.5.6. D-оптимальный регулярный равномерный план **D**, фигурирующий в условии теоремы 4.5.5, является Q-оптимальным и A-оптимальным, если система функций $f_i^{(1)}(X_i), \ldots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ ортогонализирована так, что выполняется условие (4.4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы может быть получено в качестве простого следствия теоремы 2.11.1 книги [2] и теоремы 4.4.1.

Рассмотрим теперь смешанную факторную G^{Ω}-модель для множества Ω для качественных факторов $F_1, \ldots, F_n$ и количественных факторов $F_{n+1}, \ldots, F_m$:

$$\mathrm{E}y = \mathbf{f}^T(X_1, \ldots, X_m)\boldsymbol{\Theta}. \tag{4.5.4}$$

Область планирования задается следующим образом:

$$F_j = 0, 1, \ldots, s_j - 1 \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$-1 \leq X_i \leq 1 \quad (i = n+1, \ldots, m). \tag{4.5.5}$$

Как это следует из §11 главы 3, для k-мерного вектора параметров $\boldsymbol{\Theta}$ G^{Ω}- модели выполняется равенство:

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0} \quad (Rg\mathbf{T} = q). \tag{4.5.6}$$

Пусть общее решение уравнения (4.5.6) есть

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}_m,$$

где $\mathbf{Q}$ – матрица размера k х $(k - q)$; $Rg\mathbf{Q} = k - q, \mathbf{TQ} = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{\theta}_n$ – вектор из $k - q$ элементов, которые можно принять за новые параметры. Значение величины $k - q$ может быть легко вычислено на основании теоремы 3.9.2. Проводя указанную репараметризацию, придем к модели

$$\mathrm{E}y = \mathbf{f}^T(X_1, \ldots, X_m)\mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}_m. \tag{4.5.7}$$

При различных выборах вектора новых параметров $\boldsymbol{\theta}_n$ будем получать различные матрицы **Q**, связанные между собой невырожденными линейными преобразованиями. Поэтому и получаемые при этом модели (4.5.7) будут переходить друг в друга при линейных невырожденных преобразованиях систем входящих в них функций. Свойство D-оптимальности плана инвариантно относительно указанных преобразований. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 4.5.1. План **D** будем называть D-оптимальным для G^{Ω}-модели при наличии ограничений (4.5.6) в области (4.5.5), если он D-оптимален для любой модели (4.5.7), получаемой репараметризацией модели (4.5.4).

Пусть **D** – регулярный равномерный план для факторного множества Ω для рассматриваемых качественных факторов $F_1, \dots, F_n$ и количественных факторов $F_{n+1}, \dots, F_m$. Будем считать, что функции $f_i^{(1)}(X_i), \dots, f_i^{(s_i-1)}(X_i)$ (входящие в G^{Ω}-модель для количественных факторов) ортогонализированы таким образом, что выполняется условие (4.4.1). Тогда, пользуясь методами, аналогичными методам §4 и §5 главы 4, можно показать, что нормированная (на одно наблюдение) дисперсия оценки регрессионной функции в точке $(j_1, \dots, j_n, X_{n+1}, \dots, X_m)$ равна

$$\begin{aligned}&\sigma_a^2(j_1, \dots, j_n, X_{n+1}, \dots, X_m) = \sigma^2 \Big\{1 + \textstyle\sum_{j=1}^{s_1-1}[f_{n+1}^{(j)}(X_{n+1})]^2 + \cdots \\ &+ \textstyle\sum_{j=1}^{s_{\mathrm{m}}-1}[f_{\mathrm{m}}^{(j)}(X_{\mathrm{m}})]^2 + (s_1 - 1) + \cdots + (s_n - 1) + \\ &\textstyle\sum_{i_1,i_2}(s_{i_1} - 1)\sum_{j=1}^{s_{i_2}-1}[f_{i_2}^{(j)}(X_{i_2})] + \cdots\Big\}.\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Если переменные X_i принимают s_i значений в узлах планов $\mathbf{D}_i$, то вследствие теоремы 3.9.2 и равенства (4.5.8)

$$\begin{aligned}&\sigma_a^2(j_1, \dots, j_n, X_{n+1}, \dots, X_m,) \\ &= \sigma^2[1 + \textstyle\sum_{i=1}^{m}(s_i - 1) + \sum_{i_1,i_2}(s_{i_1} - 1)(s_{i_2} - 1) + \dots] \\ &= \sigma^2(k - q).\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Множитель $k - q$ в последней части равенства (4.5.9) совпадает с числом параметров репараметризованной модели (4.5.7). Теперь очевидно, что следующее обобщение теоремы 4.5.5 также можно доказать аналогично теореме 4.5.4.

Теорема 4.5.7. Пусть план **D** имеет структуру регулярного факторного плана для факторного множества Ω для количественных переменных $X_1, \dots, X_m$, принимающих s_i значений в узлах планов $\mathbf{D}_i$, и качественных факторов $F_{m+1}, \dots, F_n$. Тогда для D-оптимальности плана **D** для G^{Ω}-модели

(4.5.4) при наличии ограничений (4.5.6) в области (4.5.5) необходимо и достаточно, чтобы он был равномерен.

Замечание к теореме 4.5.7. Очевидно, что теорема 4.5.6 остается справедливой, если под регулярным равномерным планом понимать план, фигурирующий в условии теоремы 4.5.7.

Приведенные результаты могут служить обоснованием применимости критерия регулярности при выборе экспериментального плана.

§ 6. BG-критерий

Геометрическая интерпретация D-оптимальных (и близким к ним) планов связана с рассмотрением объема многомерного эллипсоида. Ее использование не дает наглядного представления об относительной эффективности сравниваемых между собой планов. В этом параграфе рассматривается некоторое преобразование, приводящее указанную характеристику планов к линейным размерам области планирования. Преобразование предложено в работе В.З.Бродского и Т.И.Голиковой [6]. Оно применимо не только к факторным моделям, но и к другим моделям полиномиального типа.

Приведем один предварительный пример из оригинальной работы [6], относящийся к планированию второго порядка. Пусть $\mathbf{D}^*$ – D-оптимальный план на кубе

$$-1 \leq X_i \leq 1 \;\; (i = 1, \ldots, 7)$$

для модели второго порядка. Пусть $\mathbf{M}^*$ – информационная матрица плана $\mathbf{D}^*$.

Рассмотрим теперь другой план $\mathbf{D_1}$ для той же модели, который образуется из плана $\mathbf{D}^*$ умножением координат любой его точки на 0,99. Ясно, что на практике оба эти плана будут рассматриваться как «почти совпадающие».

Легко подсчитать, однако, что определители двух информационных матриц $\mathbf{M_1}$ (плана $\mathbf{D_1}$) и $\mathbf{M}^*$ связаны следующим соотношением:

$$det M_1 = 0{,}28 \cdot det\mathbf{M}^*.$$

Таким образом, по величине определителя информационной матрицы план $\mathbf{D_1}$ более чем в три раза «хуже» плана $\mathbf{D}^*$. Отсюда с очевидностью следует, что сравнивать между собой планы по значению определителя информационной матрицы очень неудобно. Ничего в этом удивительного нет, конечно: при переходе к многомерным характеристикам наглядность сравнения теряется. Поэтому обычно стремятся все характеристики привести к линейному размеру.

Именно с этим обстоятельством связано то, что ряд авторов подвергает рассмотренный критерий (определитель информационной матрицы) некоторым преобразованиям. Используется такое преобразование, как корень степени q. Иногда полагают $q = k$, где k – число параметров модели. Чаще, однако, полагают $q = 2k$. Посмотрим, что это дает для рассматриваемого примера.

Легко подсчитать, что

$$\frac{(det\mathbf{M_1})^{1/k}}{(det\mathbf{M}^*)^{1/k}}100\% = 96{,}5\%\,,$$

$$\frac{(det\mathbf{M_1})^{1/2k}}{(det\mathbf{M}^*)^{1/2k}}100\% = 98{,}3\%\,,$$

То есть план, который нужно было бы назвать 99%-м планом, интерпретируется при $q = k$ как 96,5%-й, а при $q = 2k$ как 98,3%-й. Различие не очень большое, особенно для $q = 2k$. Поэтому может показаться, что это преобразование отвечает поставленной цели. Однако еще один пример покажет, что это совсем не так.

Если в рассмотренном примере вместо плана $\mathbf{D}_1$ выбрать «90%-й» план $\mathbf{D}_2$, то легко подсчитать, что при $q = 2k$ он будет интерпретироваться как 83%-й, а при $q = k$ как 69%-й. Можно было бы привести еще более контрастные примеры.

Получается, что использование указанных преобразований только ухудшает положение. В самом деле, поскольку определители информационных матриц отличаются обычно на несколько порядков, то их и не пытаются сравнивать, а только констатируют, какой из них больше. После извлечения корня создается впечатление сопоставимости критериев. И исследователь может предпочесть не вполне удобный план (например, с большим числом опытов) только потому, что он обладает «значительно» лучшей характеристикой по сравнению с другими. На самом же деле может оказаться так, что характеристики всех планов практически совпадают.

Можно ли найти преобразование, которое никогда не искажает (в указанном смысле) характеристику D-критерия оптимальности планирования? Такое преобразование для полиномиальных моделей задается извлечением корня степени

$$q = 2n_1 + 4n_2 + \cdots + 2ln_l, \tag{4.6.1}$$

где n_i – число одночленов порядка i в модели $(i = 1, \dots, l)$.

Получаемый при этом критерий назовем BG-критерием.

Обозначим через m число переменных, а через k – число параметров полиномиальной модели. Тогда для планов первого порядка (представителями которых могут быть двухуровневые факторные планы главных эффектов) формула (4.6.1) принимает следующий вид:

$q = 2k - 2.$

Для планов второго порядка

$q = 4k - 2n - 4.$

Для рассмотренного выше примера $q = 126$ (вместо используемых 36 и 72).

Таким образом, вводимый *BG*-критерий плана **D** (связанный с критерием *D*-оптимальности и выражаемый через определитель информационной матрицы **M** плана **D**) выглядит следующим образом:

$$\frac{(det\mathbf{M})^{1/q}}{(det\mathbf{M}^*)^{1/q}}\,100\%\,, \qquad (4.6.2)$$

где q задается выражением (4.6.1).

Используя выражение (4.6.2), получим, что для плана $\boldsymbol{D}_1$ значение *BG*-критерия равно 99% и равно 90% для плана $\boldsymbol{D}_2$.

Очевиден геометрический смысл *BG*-критерия. Если для некоторого плана значение *BG*-критерия равно, скажем, 95%, то точно такой же определитель информационной матрицы имеет *D*-оптимальный план, расположенный на кубе, линейные размеры которого умножены на 0.95.

Литература

1. Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1960). The equivalence of two extremum problems. *Canad. J. Math.*, **12**, 363–366.

2. Федоров В.В. (1971). *Теория оптимального эксперимента*. М., *«Наука»*.

3. Бродский В.З. (1975). Факторные эксперименты: модели, планы, оптимальность. В сб. *«Планирование оптимальных экспериментов»*. Изд-во МГУ.

4. Hoel, P.G. (1958). Efficiency problems in polynomial estivation. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 1134–1145.

5. Guest, P.G. (1958). The spacing of observations in polynomial regression. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 294–299.

6. Бродский В.З., Голикова Т.И. (1981). О сопоставимости критериев оптимальности планирования. *Вопросы кибернетики. Нетрадиционные подходы к планированию эксперимента. Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 158-160.

Глава 5. Регулярные планы

§ 1. Классификация

Рассмотрим частные случаи регулярных факторных планов и сопоставим их с известными комбинаторными построениями.

Определение 5.1.1. Симметричный план $s^m//N$ называется ортогональной таблицей мощности t и обозначается $(N,\ m,\ s,\ t)$, если для любых t факторов все s^t различных комбинаций их уровней встречаются одинаковое число раз λ. Число λ называется индексом таблицы.

В комбинаторной математике ортогональные таблицы рассматриваются обычно в транспонированном виде.

Очевидно, что если симметричный регулярный факторный план мощности t является также и равномерным, то для любых t факторов все s^t различных их комбинаций встречаются одинаковое число раз.

Пусть теперь в симметричном плане для любых t факторов все s^t различных их комбинаций встречаются одинаковое число раз. Рассматривая все уровни некоторого фактора, получим, что все s^{t-1} различных комбинаций остальных $t-1$ факторов встречаются ровно λs раз. Аналогичным образом получим, что все s различных уровней любого фактора встречаются ровно λs^{t-1} раз. Поэтому план является равномерным и выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4). Действительно,

$$(\lambda s^t)^{t-1}\lambda = (\lambda s^{t-1})^t.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1.1. Симметричный равномерный регулярный s-уровневый m-факторный план в N опытах мощности t эквивалентен ортогональной таблице $(N,\ m,\ s,\ t)$ мощности t.

Определение 5.1.2. Если для таблицы $(N,\ m,\ s,\ t)$ выполняется условие $\lambda = s^l$ (l целое), то такой план называется гиперкубом мощности t.

Определение 5.1.3. Множество целых чисел $0,1,\dots,s-1$ расположенных в виде $(s \times s)$-матрицы, называется квадратом размера s. Квадрат называется латинским, если каждое целое встречается ровно один раз в каждой строке и в каждом столбце.

Определение 5.1.4. Два квадрата одного и того же размера называются ортогональными, если при наложении их друг на друга каждая упорядоченная пара целых чисел встречается ровно один раз.

Существует пара ортогональных квадратов (называемых стандартными) таких, что им будет ортогонален любой латинский квадрат этого же размера. Первый из этих квадратов содержит первую строку из 0, вторую – из 1 и т. д. Второй квадрат есть транспонированный первый квадрат.

Теорема 5.1.2. Число попарно ортогональных латинских квадратов размера s не более чем $s-1$.

Прямое доказательство этой теоремы можно найти в книге D.Raghavarao [1]. Однако не будем приводить его здесь, так как это утверждение станет очевидным после доказательства теоремы 5.1.3 и неравенства (5.2.5).

Определение 5.1.5. Множество $s-1$ попарно ортогональных латинских квадратов размера s называется полным множеством ортогональных латинских квадратов.

Вместе со стандартными квадратами полное множество ортогональных латинских квадратов образует множество из $s+1$ попарно ортогональных квадратов.

Примером такого множества для случая $s=3$ могут служить следующие квадраты:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}. \qquad (5.1.1)$$

Определение 5.1.6. Если множество целых чисел одного из ортогональных латинских квадратов заменено латинскими буквами, а множество целых чисел другого латинского квадрата – греческими буквами, такую пару ортогональных латинских квадратов называют греко-латинским квадратом. Аналогично, систему более чем из двух попарно ортогональных латинских квадратов называют гипергреко-латинским квадратом.

Пару ортогональных латинских квадратов в ряду (5.1.1) можно представить в виде греко-латинского квадрата

$$\begin{matrix} a\alpha & b\gamma & c\beta \\ b\beta & c\alpha & a\gamma \\ c\gamma & a\beta & b\alpha \end{matrix}. \qquad (5.1.2)$$

Построим вместо каждого квадрата (5.1.1) вектор-столбец, записывая второй столбец квадрата под первым, а третий – под вторым. Это даст четыре столбца, образующих, очевидно, ортогональную таблицу (9, 4, 3, 2) индекса 1, или гиперкуб мощности 2:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.1.3)$$

Очевидно, что строки любой ортогональной таблицы (9, 4, 3, *2)* можно расположить таким образом, чтобы первые два ее столбца совпали с первыми двумя столбцами (5.1.3). Отсюда легко получить способ построения квадратов (5.1.1). Используя аналогичные построения с n ортогональными латинскими квадратами размера s, получим следующую теорему.

Теорема 5.1.3 [2]. Существование множества из n ортогональных латинских квадратов размера s эквивалентно существованию ортогональной таблицы $(s^2,\ n+2,\ s,\ 2)$.

Концепция латинских квадратов, ортогональных латинских (греко-латинских и гипергреко-латинских) квадратов была обобщена Кишеном [3, 4]. Им были введены понятия латинских кубов и гиперкубов, ортогональных латинских (греко-латинских и гипергреко-латинских) кубов и гиперкубов.

Определение 5.1.7. Множество целых чисел $0,1,\dots,s-1$, расположенных в виде кубической решетки $(s \times s \times s)$, называется кубом размера s. Куб называется латинским первого порядка, если каждое целое встречается ровно s раз в каждой плоскости, параллельной некоторой грани куба. Два куба одного и того же размера называются ортогональными, если при наложении их друг на друга каждая упорядоченная пара целых чисел встречается ровно s раз.

Существуют три попарно ортогональных куба (называемых стандартными) таких, что им будет ортогонален любой латинский куб этого же размера первого порядка. Стандартные кубы для случая $s=2$ изображены на рис. 3. Аналогично построение их для любого s.

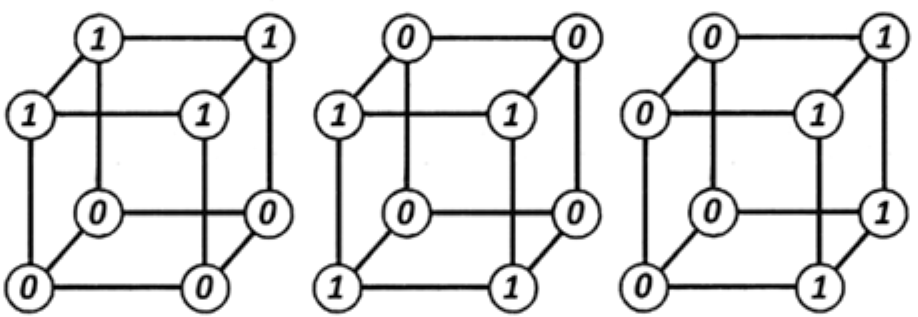


Рис. 3. Три стандартных попарно ортогональных куба размера 2

Определение 5.1.8. Если множество целых чисел одного из ортогональных латинских кубов заменено латинскими буквами, а множество целых чисел другого латинского куба – греческими буквами, такую пару ортогональных латинских кубов называют греко-латинским кубом. Аналогично, систему более чем из двух попарно ортогональных латинских кубов называют гипергреко-латинским кубом.

Пример греко-латинского куба размера 3 первого порядка приведен на рис. 4.

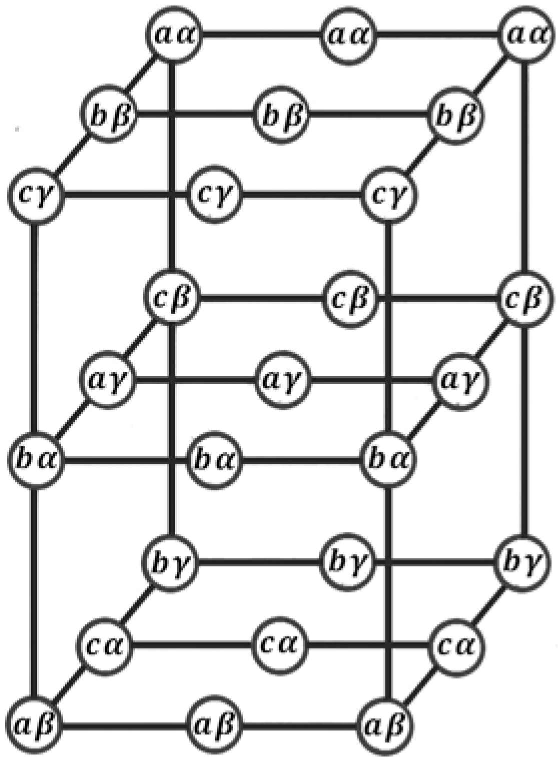


Рис. 4. Греко-латинский куб первого порядка размера 3

Рассмотрим систему ортогональных латинских кубов вместе с тремя стандартными кубами. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.1.3, можно установить эквивалентность между полученной системой ортогональных кубов и некоторой ортогональной таблицей мощности 2. Таким образом, может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема 5.1.4. Существование множества из n попарно ортогональных латинских кубов размера s первого порядка эквивалентно существованию ортогональной таблицы $(s^3,\ n+3,\ s,\ 2)$.

Кишен доказал [4], что максимальное число попарно ортогональных латинских кубов размера s первого порядка равно (s^2+s-2). Вместе со стандартными кубами они образуют множество из (s^2+s+1) ортогональных кубов. Не будем приводить здесь прямого доказательства этого утверждения, поскольку оно станет очевидным после того, как будет получено неравенство (5.2.5).

Предыдущие две теоремы 5.1.3 и 5.1.4 относились к случаям ортогональных таблиц мощности 2 и индекса 1 и 5 соответственно.

Аналогично тому, как были определены латинские кубы первого порядка и стандартные кубы, можно дать определение латинских гиперкубов первого порядка и стандартных гиперкубов и показать эквивалентность существования множества из n ортогональных l-мерных гиперкубов размера s первого порядка и существования ортогональной таблицы $\left(s^l,\ n+1,\ s,\ 2\right)$ мощности 2 и индекса $s^{l-2}(l > 3)$.

Таким образом, концепция ортогональных латинских гиперкубов первого порядка Кишена полностью описывает случай гиперкубов мощности 2.

Рассмотрим ортогональную таблицу $(s^3,\ n+3,\ s,\ 3)$ мощности 3 и индекса 1, соответствующее ей по теореме 5.1.4 множество из n попарно ортогональных латинских кубов первого порядка и три стандартных куба. Поскольку мощность таблицы равна 3, должно выполняться следующее условие. При совмещении любых трех кубов из рассматриваемого множества из $n+3$ кубов любая упорядоченная комбинация целых чисел должна встречаться ровно один раз. Рассмотрим все случаи, когда два из совмещенных трех кубов есть стандартные кубы. Для любой строки (любого столбца) любого квадрата, составляющего любой из совмещенных кубов, найдутся такие два стандартных куба, которые дают одинаковые комбинации чисел в данной строке (столбце). Поэтому любой из совмещенных кубов должен иметь во всех строках (столбцах) составляющих его квадратов различные числа. Это означает, что все квадраты, составляющие любой из n рассматриваемых латинских кубов, должны быть латинскими.

Рассмотрим теперь все случаи, когда только один из совмещенных трех кубов есть стандартный куб. Для любого квадрата, составляющего любой из совмещенных кубов, найдется стандартный куб, содержащий одинаковые числа в данном квадрате. Поэтому остальные два из совмещенных кубов не могут иметь ни в каком из образующих их квадратов совпадающие комбинации чисел. Следовательно, любая пара рассматриваемых латинских кубов содержит соответствующие пары ортогональных латинских квадратов.

Очевидно, что легко получить ортогональную таблицу $(s^3,\ n+3,\ s,\ 3)$ по заданному множеству из n ортогональных латинских кубов размера s первого порядка при условии выполнения трех свойств:

а) при совмещении любых трех латинских кубов (если таковые имеются) любая упорядоченная комбинация целых чисел встречается ровно один раз;

б) любой квадрат, составляющий любой латинский куб, является латинским;

в) любая пара латинских кубов содержит соответствующие пары ортогональных латинских квадратов.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 5.1.5. Существование множества из n латинских кубов размера s первого порядка, удовлетворяющих условиям а, б и в, эквивалентно существованию ортогональной таблицы $(s^3, n+3, s, 3)$ мощности 3 и индекса 1.

На рис. 5 приведен пример множества из трех латинских кубов (или гипергреко-латинского куба) размера 4 первого порядка, удовлетворяющих условиям а, б и в и, следовательно, эквивалентных ортогональной таблице (64, 6, 4, 3).

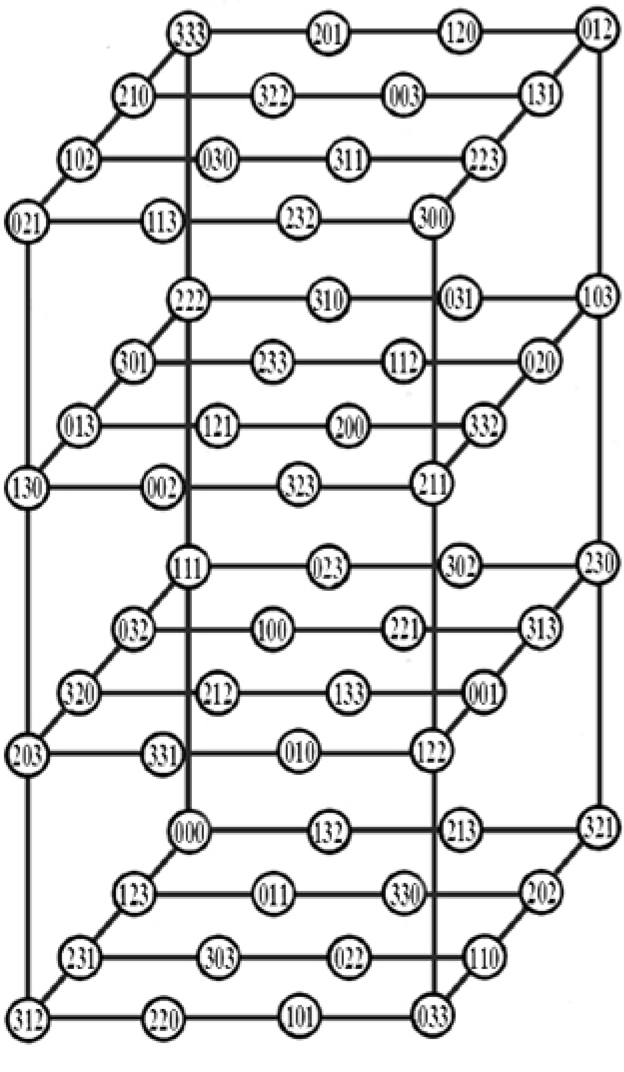


Рис. 5. Гипергреко-латинский куб первого порядка размера 4, эквивалентный ортогональной таблице (64, 6, 4, 3)

Определение 5.1.9. Множество целых чисел $0,1,\ldots,s^2-1$, расположенных в виде кубической решетки $(s\times s\times s)$, называется латинским кубом размера s второго порядка, если каждое целое встречается ровно один раз в каждой плоскости, параллельной некоторой грани куба.

Очевидно, что не существует пары ортогональных латинских кубов второго порядка, поскольку число различных упорядоченных пар целых чисел $0,1,\ldots,s^2-1$ равно s^4, а число позиций куба равно s^3. Однако возможно существование множества из n попарно ортогональных латинских кубов первого порядка и одного латинского куба второго порядка. В этом случае их существование эквивалентно существованию регулярного факторного плана мощности 2 для $n+3$ факторов на s уровнях и одного фактора на s^2 уровнях. Пример пары ортогональных латинских кубов, один из которых есть латинский куб размера 2 второго порядка, а другой – латинский куб размера 2 первого порядка, приведен на рис. 6 (эта пара кубов представлена в виде греко-латинского куба размера 2).

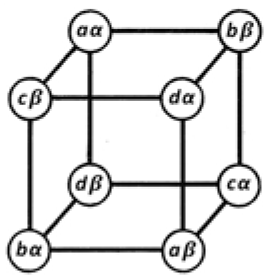


Рис. 6. Ортогональные латинский куб размера 2 второго порядка и латинский куб размера 2 первого порядка

Этому кубу отвечает регулярный факторный план $2^4\times 4$ мощности 2:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим регулярный факторный план $\mathbf{D}$ в N опытах мощности 2, относительно которого не будем предполагать ни симметричности, ни равномерности. Пусть план $\mathbf{D}$ содержит m факторов $F_1,\ldots,F_m$ с числами уровней соответственно $s_1,\ldots,s_m$; $N=s^2$; $s=s_1=s_2=\max\limits_i\{s_i\}$. И пусть каждый уровень факторов F_1 и F_2 появляется в плане s раз. Уровни фактора F_3 расположим в виде квадратной таблицы размера $s\times s$. На пересечении

i-й строки и j-го столбца $(i, j = 0,1, \dots, s-1)$ поставим тот уровень F_3, который встречается в плане **D** с j-м уровнем F_2 и i-м уровнем F_1. Вследствие регулярности плана **D** (то есть выполнения условия пропорциональности частот для любых двух факторов) заданный уровень фактора F_3 встречается с любым уровнем фактора F_1 так же, как и фактора F_2, одинаковое число раз. Это означает, что в рассматриваемом квадрате n-й уровень фактора F_3 появляется в каждой строке и каждом столбце λ_n раз.

Определение 5.1.10. Пусть $C = (c_1, \dots, c_l)$ – упорядоченное множество из l различных элементов и $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ – матрица порядка s $(a_{ij} \in C)$. Пусть для каждого $n = 1, \dots, l$ c_n появляется точно λ_n раз $(\lambda_n > 0)$ в каждой строке и каждом столбце матрицы **A**. Тогда **A** называется частотным квадратом (или F-квадратом) на C размера s и с частотным вектором $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$.

Будем обозначать через $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ F-квадрат размера s с частотным вектором $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Вместо последовательной записи одинаковых значений λ_i будем использовать степенное обозначение. Так, вместо $F(s; \lambda, \dots, \lambda)$ будем писать $F(s; \lambda^l)$.

Частный случай F-квадрата – $F(s; 1^s)$, который, очевидно, является латинским квадратом размера s.

Приведем пример квадрата $F(6; 2^3)$ на $C = (1, 2, 3)$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}.$$

Теорема 5.1.6 [5]. Для существования $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ квадрата необходимо и достаточно, чтобы

$$s = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i. \tag{5.1.4}$$

Доказательство. Необходимость условия (5.1.4) для существования квадрата $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ следует из определения F-квадрата. Докажем достаточность условия (5.1.4). Построим латинский квадрат размера s или квадрат $F(s; 1^s)$ на упорядоченном множестве $B = (b_1, \dots, b_s)$. Разобьем B на l различных подмножеств $S_1, \dots, S_l$ таких, что S_i содержит λ_i элементов. Определим однозначную функцию f на B в C следующим образом:

$$f(x) = a, \text{ если } x \in S_i \quad (i = 1, \dots, l).$$

Применяя функцию f к элементам $F(s; 1^s)$ квадрата, получим квадрат $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ на C.

Понятие ортогональности латинских квадратов может быть обобщено на случай F-квадратов.

Определение 5.1.11. Квадрат $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ на $C = (c_1, \dots, c_l)$ и квадрат $F(s; \lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$ на $C = (c'_1, \dots, c'_l)$ называются ортогональными, если при наложении их друг на друга упорядоченная пара c_i и c'_j встречается точно $\lambda_i \lambda'_j$ раз.

Приведем пример множества из пяти попарно ортогональных F-квадратов размера 4:

$$F(4; 1^4) = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}; \quad F(4; 2, 1^2) = \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix};$$

$$F(4; 2^2) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}; \qquad F(4; 2^2) = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix};$$

$$F(4; 2^2) = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Вернемся к рассмотрению регулярного факторного плана D мощности 2. Аналогично расположению уровней фактора F_3 в квадратной таблице расположим уровни фактора F_4. В каждой строке и каждом столбце квадратной таблицы n-й уровень фактора F_4 будет появляться λ'_n раз. Полученная таблица представляет собой также F-квадрат на множестве $C' = (c'_1, \dots, c'_l)$ с частотным вектором $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$. Наложим квадрат $F(s; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ на квадрат $F(s; \lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$. В соответствии с условием пропорциональности частот число совместных появлений уровня c_i фактора F_3 и уровня c'_j фактора F_4 равно $\lambda_i \lambda'_j$. Таким образом, эти F-квадраты ортогональны. Проводя аналогичные построения для остальных факторов плана **D**, получим множество из $m - 2$ попарно ортогональных F-квадратов порядка s.

Очевидно, что все приведенные построения обратимы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1.7. Следующие два утверждения эквивалентны:

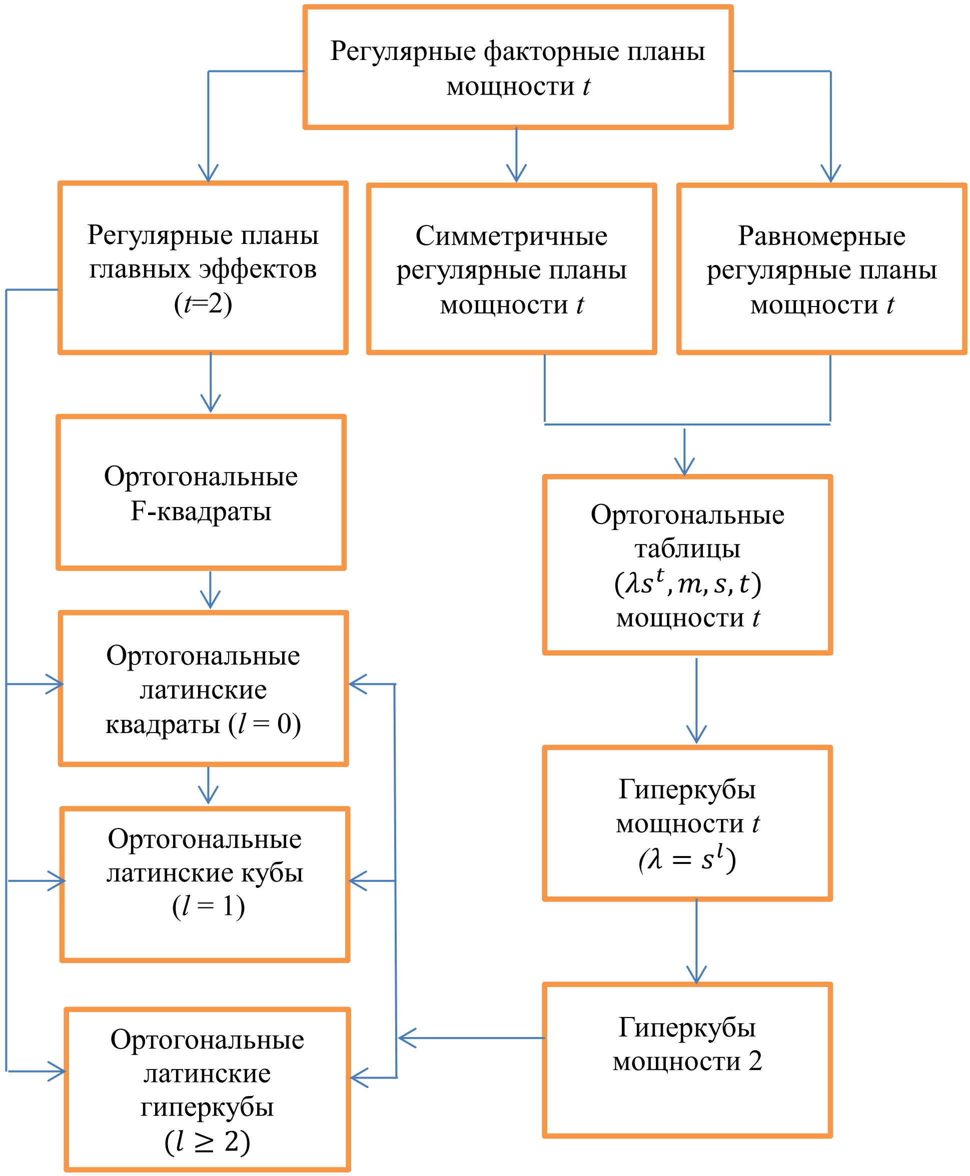
1) существует множество из $m - 2$ попарно ортогональных $F\left(s; \lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_{i_j}^{(j)}\right)$ квадратов $(j = 1, \dots, m - 2)$;

2) существует регулярный факторный план $s^2 \times l_1 \times \dots \times l_{m-2}$ мощности 2 в s^2 опытах.

Один важный частный случай ортогонального множества F-квадратов вводится посредством следующего определения.

Определение 5.1.12. Пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ ортогональные F-квадраты, и пусть $\mathbf{A}_1$ – латинский квадрат. Тогда $\mathbf{A}_2$ называется ортогональным разбиением латинского квадрата $\mathbf{A}_1$. Несколько попарно ортогональных F -квадратов, являющихся ортогональными разбиениями заданного латинского квадрата, называются взаимно ортогональными разбиениями этого квадрата.

Схема, приведенная ниже, иллюстрирует указанные связи между различными регулярными факторными планами.



§ 2. Границы для числа факторов и числа наблюдений

Рассмотрим регулярный факторный план мощности t в случае ортогональных матриц эффектов. Пусть n – целая часть числа $t/2$, то есть $n = [t/2]$. Вследствие теоремы 4.1.1 при t четном будут ортогональны I, все главные эффекты и эффекты взаимодействия вплоть до порядка $n-1$. Общее количество этих ортогональных векторов равно

$$1 + \sum_{i=1}^{m}(s_i - 1) + \sum_{i>j}(s_i - 1)(s_j - 1) + \cdots \\ + \sum_{i_1>\cdots>i_n}(s_{i_1} - 1) \ldots (s_{i_n} - 1).$$

Отсюда получим неравенство для числа наблюдений N:

$$N - 1 \geq \sum_{i=1}^{m}(s_i - 1) + \cdots + \sum_{i_1>\cdots>i_n}(s_{i_1} - 1) \ldots (s_{i_n} - 1). \qquad (5.2.1)$$

Если t нечетное, то из теоремы 3.7.2 следует, что будут ортогональны I, главные эффекты и эффекты взаимодействия вплоть до порядка $n-1$, а также все эффекты взаимодействия порядка n, включающие заданный фактор F (например, с максимальным числом уровней $s_{\max}$). Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$N - 1 \geq \sum_{i=1}^{m}(s_i - 1) + \cdots + \sum_{i_1>\cdots>i_n}(s_{i_1} - 1) \ldots (s_{i_n} - 1) \\ + \sum_{i_1>\cdots>i_n}(s_{\max} - 1)(s_{i_1} - 1) \ldots (s_{i_n} - 1). \qquad (5.2.2)$$

В частном случае симметричного плана неравенства (5.2.1) и (5.2.2) обращаются в неравенства, полученные C.R.Rao [6] для ортогональных таблиц мощности t:

$$N - 1 \geq \sum_{i=1}^{n} C_m^i (s-1)^i, \qquad (5.2.3)$$

когда t четно, и

$$N - 1 \geq \sum_{i=1}^{n} C_m^i (s-1)^i + C_{m-1}^{n}(s-1)^{n+1}, \qquad (5.2.4)$$

когда t нечетно.

Очевидно, что справедливо также и следующее тривиальное неравенство для регулярных факторных планов мощности t:

$$N \geq s_{i_1} \ldots s_{i_t}$$

для любых $i_1, \ldots, i_t$.

Частным случаем неравенства (5.2.3) при $t = 2$ является неравенство, полученное Плакеттом и Берменом (R.L.Plackett, J.P.Burman) [7],

$$m \leq \left[\frac{\lambda s^2 - 1}{s - 1}\right], \qquad (5.2.5)$$

где λ – индекс ортогональной таблицы.

Частный случай неравенства (5.2.4) при $t = 3$ есть неравенство

$$m \le \left[\frac{\lambda s^2-1}{s-1}\right]+1. \tag{5.2.6}$$

Следующие четыре теоремы проводятся здесь без доказательств (они могут быть найдены в цитируемых работах).

Неравенство (5.2.5) и (5.2.6) могут быть усилены для ортогональных таблиц мощности 2 и 3 в том случае, когда $\lambda-1$ не делится нацело на $s-1$.

Теорема 5.2.1 [8]. Для ортогональных таблиц $(\lambda s^2,\ m,\ s,\ 2)$ справедливо неравенство

$$m \le \left[\frac{\lambda s^2-1}{\lambda-1}\right]-[\nu]-1, \tag{5.2.7}$$

для ортогональных таблиц $(\lambda s^3,\ m,\ s,\ 3)$ справедливо неравенство

$$m \le \left[\frac{\lambda s^2-1}{\lambda-1}\right]-[\nu], \tag{5.2.8}$$

где ν – положительное число, задаваемое равенством

$$\nu = {}^1\!/_2\left\{\sqrt{1+4s(s-1-b)}-(2s-2b-1)\right\};$$

a и b – целые числа, входящие в разложение числа $\lambda-1$:

$$\lambda-1=a(s-1)+b, 0\le b\le s-1,\quad a\ge 0.$$

В том случае, когда $\lambda-1$ делится нацело на $s-1$, неравенство (5.2.6) также может быть усилено.

Теорема 5.2.2 [8]. Для ортогональных таблиц $(\lambda s^3,\ m,\ s,\ 3)$

$$m \le \left[\frac{\lambda s^2-1}{\lambda-1}\right]-1, \tag{5.2.9}$$

если $\lambda-1=a(s-1)$ (a целое) и $(s-1)^2(s-2)$ не делится нацело на $as+2$.

Неравенства (5.2.3) и (5.2.4) могут быть усилены для ортогональных таблиц индекса 1.

Теорема 5.2.3 [9]. Для ортогональных таблиц $(s^t,\ m,\ s,\ t)$ при $t\le s$

$$m\le s+t-1, \text{если } s \text{ четное}, \tag{5.2.10}$$

и

$$m\le s+t-2, \text{если } s \text{ нечетное и } t>3. \tag{5.2.11}$$

Для случая, когда $s\le t$, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2.4 [9]. Для ортогональных таблиц $(s^t,\ m,\ s,\ t)$

$$m\le t+1, \text{если } s\le t. \tag{5.2.12}$$

Следующая теорема связывает максимальные числа факторов, которые можно включить в ортогональные таблицы мощности t и $t-1$.

Теорема 5.2.5 [10]. Пусть m' и m – максимальные числа факторов для ортогональных таблиц $(\lambda s^{t-1},\ m',\ s,\ t-1)$ и $(\lambda s^{t},\ m,\ s,\ t)$ соответственно. Тогда

$$m \le m' + 1. \tag{5.2.13}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что первые λs^{t-1} элементов последнего столбца ортогональной таблицы $(\lambda s^{t},\ m,\ s,\ t)$ одинаковы. Тогда, очевидно, что ее подматрица, образованная первыми λs^{t-1} строками и первыми $m-1$ столбцами, составляет ортогональную таблицу $(\lambda s^{t-1},\ m-1,\ s,\ t-1)$. Отсюда следует неравенство (5.2.13).

Приведем, наконец, без доказательства теорему о максимальном числе факторов в плане.

Теорема 5.2.6 [11]. Пусть $\lambda > 1$ нечетно и $\lambda \le t-1$, тогда максимальное число факторов в плане $(\lambda s^{t},\ m,\ s,\ t)$ равно $t+1$.

§ 3. Нахождение оценок

Пусть **D** – невырожденный факторный план для факторного множества Ω (то есть векторы эффектов, порождаемые планом **D** и множеством Ω, линейно независимы). Если **D** – план для количественных факторов и $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}^{\Omega D}_{1\ldots m}$ –матрица коэффициентов плана для факторной A^{Ω}-модели, то $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ невырождена. В этом случае вектор м.н.к.-оценок $\widehat{\mathbf{B}}^{\Omega}$ вектора параметров $\mathbf{B}^{\Omega}$ этой модели находится вследствие (2.2.3) из равенства

$$\widehat{\mathbf{B}}^{\Omega} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

(здесь, как и ранее, индекс Ω указывает на принадлежность к факторной модели для факторного множества Ω).

Если план **D** регулярен для факторного множества Ω, то существует такая модель для множества Ω, что $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ диагональна. Если план **D** также и равномерен, такой моделью будет модель истинных эффектов (3.5.6). В этом случае

$$\widehat{\mathbf{B}}^{\Omega} = \frac{1}{N}\mathbf{X}^T\mathbf{y}. \tag{5.3.1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{B}_{i_1\ldots i_n} = \frac{1}{N^f}\mathbf{F}^{f\mathrm{T}}_{i_1\ldots i_n}\boldsymbol{\eta}^f; \quad \mathbf{\Theta}_{i_1\ldots i_n} = \boldsymbol{\rho}^{T}_{i_1\ldots i_n}\boldsymbol{\eta}^f.$$

Из равенства (5.3.1) следует, что м. н. к.-оценка вектора $\mathbf{B}_{i_1\ldots i_n}$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{i_1\ldots i_n} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^{fD^T}_{i_1\ldots i_n}\mathbf{y}. \tag{5.3.2}$$

Пусть в плане $\mathbf{D}$ для смешанной G^{Ω}-модели факторы $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$ – качественные и факторы $F_{j_1}, \dots, F_{j_r}$ – количественные.

Теорема 5.3.1. Для равномерного регулярного плана $\mathbf{D}$

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \boldsymbol{\rho}^{DT}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \mathbf{y} \tag{5.3.3}$$

есть м.н.к.-оценка вектора $\boldsymbol{\Theta}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l}$ при ограничении

$$\mathbf{V}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. При выполнении равенства (5.3.3)

$$\mathbf{z}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \mathbf{F}^{f}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\mathbf{B}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l}. \tag{5.3.4}$$

Действительно, вследствие равенств (3.11.1), (3.11.2), (3.11.4) и (5.3.2)

$$\mathbf{z}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \mathbf{z}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \boldsymbol{\rho}^{\mathbf{D}T}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \mathbf{y}$$
$$= \left(\mathbf{x}_{i_1 \dots i_r} \otimes \mathbf{F}^{f}_{j_1 \dots j_l}\right) \left(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}}_{i_1 \dots i_r} \otimes \mathbf{F}^{f\mathbf{D}}_{j_1 \dots j_l}\right)^T \mathbf{y}$$
$$= \left(\mathbf{x}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{i_r} \otimes \mathbf{F}^{f}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}^{f}_{j_l}\right)$$
$$\times \left(N\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}}_{i_1} \otimes \dots \otimes N\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}}_{i_r} \otimes \mathbf{F}^{f\mathbf{D}}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}^{f\mathbf{D}}_{j_l}\right)^T \mathbf{y} \frac{1}{N}$$
$$= N\left(\mathbf{x}_{i_1} \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}T}_{i_1}\right) * \dots * N\left(\mathbf{x}_{i_r} \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{D}T}_{i_r}\right) * \left(\mathbf{F}^{f}_{j_1} \mathbf{F}^{f\mathbf{D}T}_{j_1}\right) * \dots * \left(\mathbf{F}^{f}_{j_l} \mathbf{F}^{f\mathbf{D}T}_{j_l}\right) \mathbf{y} \frac{1}{N}$$
$$= \left(\mathbf{F}^{f}_{i_1} \mathbf{F}^{f\mathbf{D}T}_{i_1}\right) * \dots * \left(\mathbf{F}^{f}_{j_l} \mathbf{F}^{f\mathbf{D}T}_{j_l}\right) \mathbf{y} \frac{1}{N}$$
$$= \left(\mathbf{F}^{f}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}^{f}_{j_l}\right) \left(\mathbf{F}^{f\mathbf{D}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}^{f\mathbf{D}}_{j_l}\right)^T \mathbf{y} \frac{1}{N}$$
$$= \mathbf{F}^{f}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \mathbf{F}^{f\mathbf{D}T}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \mathbf{y} \frac{1}{N} = \mathbf{F}^{f}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\mathbf{B}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{V}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} = \mathbf{V}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \boldsymbol{\rho}^{\mathbf{D}T}_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_l} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{5.3.5}$$

И утверждение теоремы следует из равенств (5.3.4) и (5.3.5).

Литература

1. Raghavarao, D. (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. New York: Wiley.

2. Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā*, **17**, 143–164.

3. Kishen, K. (1942). On Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes. *Current Sci.*, **11**, 98–99.

4. Kishen, K. (1949). On the construction of Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **2**, 20–48.

5. Hedayat, H. and Seiden, E. (1970). F-square and orthogonal F-square design: a generalization of Latin square and orthogonal Latin squares design. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 2035–2044.

6. Rao, C.R, (1947). Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, **9**, 128–139.

7. Plackett, R.L. and Burman, J.P. (1946). The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika*, **33**, 305–325.

8. Bose, R.C. and Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 508–524.

9. Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of index unity. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 426–434.

10. Seiden, E. and Zemach, R. (1966). On orthogonal arrays. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1355–1370.

11. Blum, J.R., Schatz, J.A., and Seiden, E.(1970). On two levels of orthogonal arrays of odd index. *J. Combin. Theory*, **9**, 239–243.

Глава 6. Геометрические планы

§ 1. Расщепление степеней свободы

Этот и следующий параграфы посвящены фундаментальной концепции, введенной R.C.Bose [1], – расщепление и природа степеней свободы в полном симметричном плане s^m, где $s = p^h$, p простое.

Определение 6.1.1. Пусть даны два множества наблюдений $y_1, \dots, y_l$ и $y_{l+1}, \dots, y_{2l}$. Тогда вектор коэффициентов линейной функции наблюдений

$$y_1 + \dots + y_l - y_{l+1} - \dots - y_{2l} \tag{6.1.1}$$

называется контрастом между этими двумя множествами наблюдений.

Очевидно, что вектор коэффициентов линейной функции (6.1.1) удовлетворяет равенству (3.3.1).

Если все N наблюдений разделены на q множеств по $N_1 = N/q$ наблюдений в каждом так, что никакое наблюдение не попало сразу в два множества, то имеется $C_q^2 = q\,(q-1)/2$ различных контрастов между этими множествами. Очевидно, что из них можно выбрать только $q-1$ независимых контрастов, например, контрасты между любым фиксированным множеством и всеми остальными. Будем говорить, что контрасты между этими множествами обладают $q-1$ степенями свободы.

Очевидна следующая лемма.

Лемма 6.1.1 [1]. Пусть все N наблюдений разделены на q_1 множеств по $N_1 = N/q_1$ наблюдений в каждом одним способом и на q_2 множеств по $N_2 = N/q_2$ наблюдений в каждом другим способом так, что для каждого разбиения никакое наблюдение не попало сразу в два множества. Тогда, если из N_1 наблюдений любого множества первого разбиения N_1/q_2 содержится в любом множестве второго разбиения, то контраст между любыми двумя множествами первого разбиения ортогонален контрасту между любыми двумя множествами второго разбиения.

Рассмотрим полный симметричный план s^m, где $s = p^h$, p простое и h целое. В плане s^m каждому уровню фактора поставим в соответствие элемент поля Галуа $GF(s)$. Тогда каждый опыт с факторами $F_1, \dots, F_m$, зафиксированными соответственно на уровнях $\chi_1, \dots, \chi_m$, будет отвечать точке m-мерного конечного евклидова пространства $EG(m, s)$.

Пусть $P(a_1, \ldots, a_m)$ – пучок параллельных плоскостей в $EG(m,s)$. При помощи этого пучка все s^m наблюдений естественно делятся на s множеств по s^{m-1} наблюдений в каждом по принципу соответствия s различным плоскостям пучка. Поскольку различные плоскости пучка не пересекаются и через любую точку $EG(m,s)$ проходит плоскость пучка, каждое наблюдение в соответствии с таким разбиением будет принадлежать одному и только одному множеству.

Будем говорить, что пучок параллельных плоскостей обладает $s-1$ степенями свободы, понимая под этим, что максимальное число независимых контрастов между множествами, порождаемыми этим пучком, равно $s-1$.

Рассмотрим два различных пучка параллельных плоскостей P_1 и P_2.

Теорема 6.1.1 [1]. Контраст между любыми множествами, порождаемыми пучком P_1, ортогонален контрасту между любыми множествами, порождаемыми пучком P_2.

Доказательство. Фиксированная плоскость P_1 пересекает s различных плоскостей P_2 в s различных $(m-2)$-плоскостях. Никакие две из этих $(m-2)$-плоскостей не могут иметь общей точки, так как в противном случае две различные плоскости P_2 будут иметь общую точку. Любая $(m-2)$-плоскость содержит ровно s^{m-2} точек, поэтому из s^{m-1} точек, принадлежащих фиксированной $(m-1)$-плоскости P_1, ровно по s^{m-2} содержится в каждой $(m-1)$-плоскости P_2. Теперь утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 6.1.1.

В соответствии с главой 1 число различных пучков параллельных плоскостей равно $(s^m-1)/(s-1)$. Каждый пучок обладает $s-1$ степенями свободы. Поэтому общее число из s^m-1 степеней свободы для всех контрастов может быть расщеплено на $(s^m-1)/(s-1)$ множеств, порождаемых пучками параллельных плоскостей, по $s-1$ степеней свободы каждое так, что контрасты, отвечающие степеням свободы одного множества, ортогональны контрастам, отвечающим степеням свободы другого множества.

§ 2. Природа степеней свободы пучков параллельных плоскостей

Следуя работе R.C.Bose [1], рассмотрим природу $s-1$ степеней свободы, принадлежащих пучку

$$P(a_1,\ \ldots,\ a_m). \tag{6.2.1}$$

Предположим, что из координат пучка $a_1, \ldots, a_m$ ненулевыми являются n из них (без ограничения общности можно считать, что это первые n), а остальные координаты равны нулю. Любая $(m-1)$-плоскость из этого пучка представляется уравнением

$$a_0 + a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0, \tag{6.2.2}$$

где a_0 принимает одно из s значений из $GF(s)$. Очевидно, что две точки, у которых i-я координата одной из них равна i-й координате другой для всех $i = 1, \dots, n,$ одновременно либо удовлетворяют уравнению (6.2.2), либо нет. Поэтому координаты контраста между любыми двумя плоскостями пучка (6.2.1) одинаковы для одинаковых комбинаций значений $\chi_1, \dots, \chi_n$.

Когда $n = 1$, координаты контраста между любыми двумя плоскостями пучка

$$P(a, 0, \dots, 0) \tag{6.2.3}$$

будут зависеть только от уровней фактора F_1 и, по определению, будут образовывать главный эффект этого фактора. Поскольку пучок параллельных плоскостей обладает $s-1$ степенями свободы, пучок (6.2.3) порождает полное множество линейно независимых главных эффектов.

Когда $n = 2$, координаты контраста между любыми двумя плоскостями пучка

$$P(a_1, a_2, 0, \dots, 0) \tag{6.2.4}$$

будут зависеть только от уровней факторов F_1 и F_2. Вследствие теоремы 6.1.1 этот контраст будет ортогонален ко всем главным эффектам факторов F_1 и F_2. Поэтому он будет представлять собой эффект взаимодействия факторов F_1 и F_2. Число различных пучков вида (6.2.4) равно $s-1$. Каждый из них обладает $s-1$ степенями свободы, и эти степени свободы для одного пучка вида (6.2.4) вследствие теоремы 6.1.1 ортогональны степеням свободы для другого пучка вида (6.2.4). Поэтому пучки вида (6.2.4) дают полное множество из $(s-1)^2$ линейно независимых эффектов взаимодействия факторов F_1 и F_2.

Продолжая увеличивать n, получим следующую теорему.

Теорема 6.2.1 [1]. Если n координат $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ пучка (6.2.1) ненулевые, а остальные равны нулю, то контраст между любыми двумя плоскостями пучка (6.2.1) есть эффект взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$. Пучок (6.2.1) обладает $s-1$ степенями свободы. Число различных пучков, образующих эффекты взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ равно $(s-1)^{n-1}$.

Пример 6.2.1. Рассмотрим полный симметричный план 3^2 (план $\mathbf{D}^f$), включающий все комбинации уровней двух трехуровневых факторов F_1 и F_2. Уровням факторов F_1 и F_2 поставим в соответствие элементы поля Галуа $GF(3)$: $0, 1, 2$. Этот план в 9 опытах представлен в первых двух столбцах табл. 3.

Таблица 3
Полный план 3^2

F_1	F_2	F_1+F_2	F_1+2F_2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2
0	1	1	2
1	1	2	0
2	1	0	1
0	2	2	1
1	2	0	2
2	2	1	0

Плоскости пучка, соответствующего главным эффектам фактора F_1, определяются естественно. Каждую из трех плоскостей составляют три опыта, в которых фактор F_1 принимает значение 0, 1 и 2 соответственно. Поэтому два независимых главных эффекта фактора F_1 можно записать, например, как контрасты между первой и второй и между первой и третьей плоскостями. Координаты этих контрастов записаны в табл. 4 (первые два столбца).

Таблица 4
Главные эффекты и эффекты взаимодействия плана 3^2

Главные эффекты				**Эффекты взаимодействия**			
фактор F_1		фактор F_2		факторы F_1 и F_2			
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
1	0	–1	–1	1	0	1	0
0	1	–1	–1	0	1	0	1
–1	–1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	–1	–1
0	1	1	0	–1	–1	1	0
–1	–1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	–1	–1	0	1
0	1	0	1	1	0	–1	–1

Чтобы определить параллельные плоскости пучков, соответствующих эффектам взаимодействия факторов F_1 и F_2, нужно найти сумму элементов первых двух столбцов табл. 3, а также сумму элементов первого и удвоенного второго столбцов этой таблицы. Эти суммы приведены в третьем и четвертом столбцах табл. 3. Плоскости пучков, соответствующих эффектам взаимодействия факторов F_1 и F_2, определяются следующим образом. Первый пучок содержит три плоскости, каждая из которых отвечает трем опытам, в которых сумма $F_1 + F_2$ принимает значение 0, 1 и 2 соответственно. Координаты контрастов между первой и второй и между первой и третьей плоскостями записаны в табл. 4 в пятом и шестом столбцах соответственно. Аналогичным образом находятся плоскости и контрасты второго пучка, соответствующего эффектам взаимодействия факторов F_1 и F_2.

Пусть $X_i \in PG(m, s)$ – вершины фундаментального симплекса. Рассмотрим связку параллельных плоскостей $P(a_1, \dots, a_m)$ в $PG(m, s)$. Предположим, что координаты $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ этой связки ненулевые, а остальные координаты равны нулю. Тогда вершина связки задается следующим образом:

$$\chi_0 = 0, \quad a_{i_1}\chi_{i_1} + \dots + a_{i_n}\chi_{i_n} = 0 \tag{6.2.5}$$

Вершина (6.2.5) проходит через все вершины фундаментального симплекса, кроме вершин $\mathrm{X}_{i_1}, \dots, \mathrm{X}_{i_n}$. Учитывая утверждение теоремы 6.2.1, получим следующую теорему.

Теорема 6.2.2 [1]. Пучок $P(a_1, \dots, a_m)$ параллельных плоскостей соответствует эффектам взаимодействия $(n-1)$-го порядка факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ тогда и только тогда, когда вершина отвечающей ему связки проходит через те и только те вершины фундаментального симплекса, которые отличны от $\mathrm{X}_{i_1}, \dots, \mathrm{X}_{i_n}$.

§ 3. Гиперкубы мощности t

Будем опять рассматривать полный симметричный план, в котором каждый фактор принимает s различных значений.

Уровням факторов F_i $(i = 1, \dots, m)$ ставим в соответствие элементы поля Галуа $GF(s)$, обозначаемые через $0, 1, \dots, s-1$. Полный план будет соответствовать точкам конечного евклидова пространства $EG(m, s)$. Если координаты точки этого пространства записывать как $(\chi_1, \dots, \chi_m)$, система из l независимых уравнений

$$\begin{array}{l} a_{11}\chi_1 + \dots + a_{m1}\chi_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}\chi_1 + \dots + a_{ml}\chi_m = 0 \end{array} \tag{6.3.1}$$

с коэффициентами $a_{ij} \in GF(s)$ в соответствии с §3 главы 1 определяет подмножество из s^{m-l} точек $EG(m, s)$, или подмножество полного плана s^m.

Определение 6.3.1. План, состоящий из s^{m-l} точек, удовлетворяющих системе из l линейно независимых уравнений (6.3.1), назовем геометрическим.

План будем называть геометрическим и тогда, когда в правых частях системы (6.3.1) стоят произвольные элементы. Однако всюду далее, кроме §9 главы 6, будем считать, что в правых частях уравнений (6.3.1) стоят нули.

Теорема 6.3.1 [2]. Необходимое и достаточное условие того, что s^{m-l} точек, удовлетворяющие системе из l линейно независимых уравнений (6.3.1), образуют гиперкуб мощности t, состоит в следующем. Не существует нетривиальной линейной комбинации уравнений (6.3.1), содержащей менее $t+1$ ненулевых коэффициентов.

Доказательство. Пусть любая нетривиальная линейная комбинация уравнений (6.3.1) содержит не менее $(t+1)$ ненулевых коэффициентов. Тогда любая комбинация любого множества из t факторов удовлетворяет системе уравнений (6.3.1). Действительно, без ограничения общности можно выбирать в качестве множества из t факторов, например, $F_1, \dots, F_t$,. Зафиксируем их на определенных уровнях. Тогда (6.3.1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} &a_1 = a_{t+1,1}\chi_{t+1} + \dots + a_{m1}\chi_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_l = a_{t+1,l}\chi_{t+1} + \dots + a_{ml}\chi_m. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Каждое уравнение (6.3.2) содержит по крайней мере один ненулевой коэффициент. Поэтому можно считать, что $a_{ml} \neq 0$. Прибавив к $(l-1)$-му уравнению l-е уравнение, умноженное на подходящий множитель, получим уравнение, в котором $a_{m,l-1} = 0$. Поскольку полученное уравнение также содержит по крайней мере один ненулевой коэффициент, можно считать, что $a_{m-1,l-1} \neq 0$. Продолжая этот процесс диагонализации, приведем систему (6.3.2) к полудиагональному виду. Откуда сразу получим, что система (6.3.2) всегда имеет решение, и число различных решений постоянно и равно s^{m-l-t}. Поэтому любая комбинация уровней любых t факторов встречается ровно s^{m-l-t} раз. Следовательно, план является гиперкубом мощности t.

Пусть теперь существует линейная комбинация уравнений (6.3.1), которая образует уравнение вида

$$a_1\chi_{i_1} + \dots + a_n\chi_{i_n} = 0, \tag{6.3.3}$$

где $n < t+1$. Тогда, очевидно, все комбинации уровней n факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ не будут удовлетворять (6.3.1). Таким образом, теорема доказана.

Теорема 6.3.2 [3]. Пусть существует матрица $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ размера $m \times n$ $\left(c_{ij} \in GF(s),\ s = p^h,\ p - \text{простое}\right)$ такая, что любая ее подматрица размера $t \times n$ имеет ранг t. Тогда можно построить ортогональную таблицу (s^n, m, s, t).

Доказательство. Рассмотрим матрицу $Q = \{q_{ij}\}$ полного плана s^n размера $s^n \times n$ $\left(q_{ij} \in GF(s)\right)$. Покажем, что матрица $\mathbf{A} = \mathbf{QC}^T$ размера $s^n \times m$ есть ортогональная таблица (s^n, m, s, t).

Пусть $\mathbf{A}'$ есть подматрица размера $s^n \times t$ матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}'$ – соответствующая $\mathbf{A}'$ подматрица размера $t \times n$ матрицы $\mathbf{C}$. Так как ранг $\mathbf{C}'$ равен t, каждая строка из $\mathbf{A}'$ получается из s^{n-t} различных строк матрицы $\mathbf{Q}$. Таким образом, в $\mathbf{A}'$ каждая возможная строка встречается s^{n-t} раз. Поэтому $\mathbf{A}$ – ортогональная таблица мощности t и индекса $\lambda = s^{n-t}$.

Элементы строк матрицы $\mathbf{C}$ можно интерпретировать как координаты точек в конечном проективном пространстве $PG\left(n-1, p^h\right)$ таких, что никакие t из них не лежат в пространстве размерности не выше, чем $t-2$. Это условие, таким образом, эквивалентно условию теоремы 6.3.2.

Покажем сейчас, что рассмотренные два условия, задаваемые теоремой 6.3.2 существования (s^n, m, s, t), эквивалентны условию теоремы 6.3.1.

Теорема 6.3.3. Следующие три утверждения эквивалентны:

1. Существует матрица $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ размера $m \times n$ $\left(c_{ij} \in GF\left(p^h\right),\ p \text{ простое}\right)$ такая, что любая ее подматрица размера $t \times n$ имеет ранг t.

2. Существует m точек в проективной геометрии $PG\left(n-1, p^h\right)$ такие, что никакие t из них не лежат в пространстве размерности не выше, чем $t-2$.

3. Существует система $l = m - n$ уравнений вида (6.3.1) такая, что не существует нетривиальной линейной комбинации уравнений, содержащей менее $t+1$ ненулевых коэффициентов.

Доказательство. Пусть выполняется условие 3 теоремы. Будем понимать под элементарными преобразованиями прибавление к некоторой строке линейной комбинации других строк и перестановку строк или столбцов. Тогда очевидно, что матрица $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, l)$ коэффициентов системы (6.3.1) путем элементарных преобразований может быть приведена к виду

$$\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{\mathrm{n}1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1l} & g_{2l} & \dots & g_{nl} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{6.3.4}$$

Каждая строка матрицы (6.3.4) есть нетривиальная линейная комбинация строк матрицы $\mathbf{V}$. Поэтому каждая строка матрицы (6.3.4) содержит по крайней мере $t+1$ ненулевых элементов. То есть, среди чисел $g_{1j}, \dots, g_{nj}$ при любом фиксированном j встречаются по крайней мере t

ненулевых чисел. Аналогичное утверждение можно сделать относительно любой нетривиальной линейной комбинации строк матрицы (6.3.4). А именно, нетривиальная линейная комбинация с $a(>0)$ ненулевыми коэффициентами строк матрицы (6.3.4) содержит не менее $t+1$ ненулевых элементов и не менее $t+1-a$ из них приходится на первые n элементов.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1l} & g_{2l} & \cdots & g_{nl} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (6.3.5)$$

и некоторую нетривиальную линейную комбинацию t ее строк, из которых a приходится на первые l строк и $(t-a)$ – на остальные строки. Очевидно, что первые n элементов этой линейной комбинации будут содержать по крайней мере $(t+1-a)-(t-a)=1$ ненулевой элемент. Это означает, что любая подматрица размера $t \times n$ $(t \le n)$ матрицы

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1l} & g_{2l} & \cdots & g_{nl} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (6.3.6)$$

размера $m \times n$ имеет ранг t.

Пусть выполняется условие 1 теоремы, и пусть ранг матрицы $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ равен n' $(t \le n' \le n)$. В матрице $\mathbf{C}$ выберем n' независимых строк (без ограничения общности будем считать, что этими строками являются последние n' строк $\mathbf{C}$). Тогда каждая строка $\mathbf{c}_i$ $(i = 1, \dots, m-n')$ матрицы $\mathbf{C}$ представляется в виде линейной комбинации строк $\mathbf{c}_i$ $(i = m-n'+1, \dots, m)$ этой матрицы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_1 = \lambda_{11}\mathbf{c}_{m-n'+1} + \dots + \lambda_{1n'}\mathbf{c}_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mathbf{c}_{m-n'} = \lambda_{(m-n')\,1}\mathbf{c}_{m-n'+1} + \dots + \lambda_{(m-n')\,n'}\mathbf{c}_m. \end{aligned} \qquad (6.3.7)$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}$ $(i = 1, \dots, m-n';\ j = 1, \dots, n')$. Количество ненулевых элементов в i-й строке матрицы $\mathbf{\Lambda}$ не может быть менее t, так как в противном случае строка $\mathbf{c}_i$ в соответствии с равенствами (6.3.7) может быть представима в виде линейной комбинации этих ненулевых элементов и поэтому найдется t линейно зависимых строк матрицы $\mathbf{C}$, что невозможно. По той же причине нетривиальная линейная комбинация r $(r \leq m - n')$ строк матрицы $\mathbf{\Lambda}$ не может содержать менее $t - r + 1$ ненулевых элементов.

Образуем следующую матрицу размера $(m - n') \times m$:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n'} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n'} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(m-n')\,1} & \lambda_{(m-n')\,2} & \cdots & \lambda_{(m-n')\,n'} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{6.3.8}$$

Вследствие обнаруженных свойств матрицы $\mathbf{\Lambda}$ очевидно, что любая нетривиальная линейная комбинация любых строк матрицы (6.3.8) содержит не менее $t + 1$ ненулевых элементов. Поскольку $n' \leq n$, матрица требуемого размера может быть получена из матрицы (6.3.8) вычеркиванием любых $n - n'$ строк.

Таким образом, теорема 6.3.3 доказана.

Будем говорить, что используется геометрический метод построения гиперкубов мощности t, когда они строятся на основании теоремы 6.3.1 либо теоремы 6.3.2. В этом случае s^{m-l} точек гиперкуба будут удовлетворять системе уравнений вида (6.3.1).

Пример 6.3.1 построения системы из двух уравнений с шестью переменными. Рассмотрим матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{6.3.9}$$

с элементами из поля $GF(2)$. Легко проверить, что любая подматрица размера (3×4) матрицы (6.3.9) имеет ранг 3. Очевидно, что ранг матрицы (6.3.9) равен 4 и последние четыре строки образуют линейно независимую систему. Первая строка матрицы (6.3.9) есть сумма четвертой, пятой и шестой строк, а вторая строка есть сумма третьей, четвертой и пятой строк. Используя введенные при доказательстве теоремы 6.3.3 обозначения, получим

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_6; \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_5.$$

Поэтому матрица (6.3.8) в данном случае имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а система (6.3.1) –

$$\chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 = 0,$$
$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_6 = 0.$$

Любая нетривиальная линейная комбинация равенств этой системы содержит не менее четырех ненулевых коэффициентов.

§ 4. Связанные множества пучков параллельных плоскостей

В этом разделе мы изучим природу пучков параллельных плоскостей в дробных геометрических планах [4].

Рассмотрим полный симметричный план s^m (план $\mathbf{D}^f$) и все пучки $P(a_1, \dots, a_m)$ параллельных плоскостей вида

$$a_0 + a_1\chi_1 + \dots + a_m\chi_m = 0. \quad (6.4.1)$$

Природа контрастов, порождаемых этими пучками, задается теоремой 6.2.1. Пусть $\mathbf{D}$ – подмножество из s^{m-l} точек плана $\mathbf{D}^f$, задаваемое l независимыми уравнениями (6.3.1).

Равенства (6.3.1) назовем генерирующими соотношениями плана $\mathbf{D}$. Пучки $P(a_{11}, \dots, a_{m1})$, $\dots, P(a_{1l}, \dots, a_{ml})$ назовем генераторами плана $\mathbf{D}$. Заметим, что для данного плана $\mathbf{D}$ генераторы можно выбрать неоднозначно. Пучки

$$P(\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_l a_{1l}, \dots, \lambda_l a_{m1} + \dots + \lambda_l a_{ml}) \quad (6.4.2)$$

(λ_i не равны одновременно нулю) назовем определяющими пучками плана $\mathbf{D}$. Очевидно, что можно представить однозначно определяющие пучки выражением (6.4.2), если первую из ненулевых координат считать равной единице. Таким образом, общее число различных определяющих пучков плана $\mathbf{D}$, задаваемого уравнениями (6.3.1), равно $(s^l - 1)/(s - 1)$.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\xi}$ для $\mathbf{D}$ с элементами, равными элементам контраста $\boldsymbol{\xi}^f$ порождаемого пучком $P(a_1, \dots, a_m)$ в $\mathbf{D}^f$. В этом случае будем говорить, что контраст $\boldsymbol{\xi}^f$ в $\mathbf{D}^f$ порождает $\boldsymbol{\xi}$ в $\mathbf{D}$. Если $P(a_1, \dots, a_m)$ является определяющим пучком плана $\mathbf{D}$, то $\mathbf{D}$ целиком лежит в одной из плоскостей (6.4.1) (при $a_0 = 0$) и не имеет общих точек с другими плоскостями (6.4.1) (при $a_0 \neq 0$). В этом случае $\boldsymbol{\xi}^f$ порождает в $\mathbf{D}$ нулевой вектор $\mathbf{0}$. Очевидно, что вектор $\mathbf{0}$ порождают те и только те контрасты $\boldsymbol{\xi}^f$, которые соответствуют определяющим пучкам плана $\mathbf{D}$. В этом случае будем говорить, что вектор $\mathbf{0}$ и векторы, порождаемые определяющими пучками $\mathbf{D}$, находятся в одном связанном множестве (для плана $\mathbf{D}$). Относительно определяющих пучков $\mathbf{D}$ также будем говорить, что они находятся в одном связанном множестве.

Если $P(a_1, \dots, a_m)$ не является определяющим пучком плана $\mathbf{D}$, то каждая плоскость пучка (6.4.1) пересекает $\mathbf{D}$ в s^{m-l-1} точках $(m - l - 1)$-

плоскости, которую обозначим через $P(a_0, a_1, \ldots, a_m)$**.** В этом случае любая точка плана **D** принадлежит одной и только одной плоскости пучка (6.4.1) и, следовательно, одной и только одной плоскости $P(a_0, a_1, \ldots, a_m)$**.** Таким образом, пучок параллельных плоскостей в $\mathbf{D}^f$ порождает пучок параллельных $(m-l-1)$-плоскостей $P(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ в **D**, который обозначим через $P'(a_1, \ldots, a_m)$.

Рассмотрим плоскость

$$\begin{gathered} a_0 + (\lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_l a_{1l})\chi_1 + \cdots \\ +(\lambda_0 a_m + \lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_l a_{ml})\chi_m = 0 \\ (\lambda_0 \neq 0) \end{gathered} \tag{6.4.3}$$

пучка

$$P(\lambda_0 a_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_l a_{1l},\ \ldots, \lambda_0 a_m + \lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_l a_{ml}\ ). \tag{6.4.4}$$

Очевидно, что плоскость (6.4.3) пересекает (6.3.1) в тех же точках, что и (6.4.1). Более того, все плоскости, пересекающие (6.3.1) в тех же точках, что и (6.4.1), задаются выражением (6.4.3).

Поскольку пучки $P(a_1, \ldots, a_m), P(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, P(a_{1l}, \ldots, a_{ml})$ линейно независимы, различные наборы (6.4.4) будут соответствовать различным пучкам. Таким образом, общее число различных пучков вида (6.4.4) равно s^l. Поэтому для любого пучка $P(a_1, \ldots, a_m)$, не являющегося определяющим пучком плана **D** , существует s^l пучков, считая и $P(a_1, \ldots, a_m)$**,** которые порождают один и тот же пучок $P'(a_1, \ldots, a_m)$ в **D**. Про такие s^l пучков будем говорить, что они находятся в одном связанном множестве относительно **D**. Также будем говорить, что в одном связанном множестве находятся контрасты, порождаемые этими пучками.

Общее число пучков в $\mathbf{D}^f$ равно $(s^m-1)/(s-1)$. Связанное множество определяющих пучков плана **D** состоит из $\left(s^l-1\right)/(s-1)$ пучков. Поэтому число различных связанных множеств неопределяющих пучков равно

$$\frac{(s^m-1)/(s-1) - \left(s^l-1\right)/(s-1)}{s^l} = \frac{s^{m-l}-1}{s-1}.$$

Рассмотрим два различных пучка $P'(a_1, \ldots, a_m)$ и $P'(g_1, \ldots, g_m)$, которые порождаются пучками из двух различных связанных множеств относительно **D**. Строки матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & \cdots & a_m \\ g_1 & \cdots & g_\mathrm{m} \\ a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1l} & \cdots & a_{ml} \end{Vmatrix}$$

линейно независимы. Поэтому любая фиксированная $(m-l-1)$-плоскость пучка $P'(a_1, \dots, a_m)$ пересекает s различных $(m-l-1)$-плоскостей пучка $P'(g_1, \dots, g_m)$ в s различных $(m-l-2)$-плоскостях. Никакие две из этих $(m-l-2)$-плоскостей не могут иметь общей точки, так как две различные $(m-l-1)$-плоскости пучка $P'(g_1, \dots, g_m)$ не имеют общей точки. Любая $(m-l-2)$-плоскость содержит ровно s^{m-l-2} точек. Поэтому из s^{m-l-1} точек, принадлежащих фиксированной $(m-l-1)$-плоскости пучка $P'(a_1, \dots, a_m)$, ровно по s^{m-l-2} содержится в каждой $(m-l-1)$-плоскости пучка $P'(g_1, \dots, g_m)$. Поэтому вследствие леммы 6.1.1 степени свободы, порождаемые пучком $P(a_1, \dots, a_m)$, ортогональны степеням свободы, порождаемым пучком $P'(g_1, \dots, g_m)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.4.1. Все $(s^m-1)/(s-1)$ пучков параллельных плоскостей в $\mathbf{D}^f$ делятся на $\left(s^{m-l}-1\right)/(s-1)$ связанных множеств по s^l пучков в каждом и одно связанное множество из $\left(s^l-1\right)/(s-1)$ определяющих пучков. Пучки одного и того же связанного множества порождают совпадающие пучки параллельных плоскостей в $\mathbf{D}$. Пучки из различных связанных множеств порождают пучки параллельных плоскостей в $\mathbf{D}$, обладающие ортогональными степенями свободы.

Из доказательства теоремы 6.3.1 следует, что если план включает все комбинации уровней *t* факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_t}$, ни один определяющий пучок не может иметь в качестве нулевых координат одновременно все координаты, отличные от $a_{i_1}, \dots, a_{i_t}$. Пучок, имеющий в качестве ненулевых координат только часть координат $a_{i_1}, \dots, a_{i_t}$, а именно, $a_{j_1}, \dots, a_{j_t}$ и остальные координаты нулевые, во-первых, не может быть определяющим пучком и, во-вторых, не может находиться в одном связанном множестве с пучком, имеющим в качестве нулевых координат одновременно все координаты, отличные от $a_{j_1}, \dots, a_{j_t}$.

Из сказанного выше следует, что если план **D** включает все уровни некоторого фактора F_i, то пучок P_i, соответствующий главным эффектам этого фактора в $\mathbf{D}^f$ не может быть определяющим пучком **D**. Поэтому пучок P_i' в **D** порождаемый пучком P_i, образует $s-1$ контрастов, ортогональных вектору **I**, с элементами, зависящими только от уровней фактора F_i. Следовательно, пучок P_i' также образует в **D** полное множество главных эффектов фактора F_i.

Если план **D** включает все комбинации уровней двух факторов F_i и F_j, то любой пучок P_{ij}, соответствующий эффектам взаимодействия этих факторов в $\mathbf{D}^f$, не может быть определяющим пучком плана **D**. Поэтому пучок P_{ij}' в **D**, порождаемый пучком P_{ij}, образует $s-1$ контрастов, ортогональных вектору **I** и всем главным эффектам факторов F_1 и F_2

(последнее верно вследствие того, что пучки, отвечающие главным эффектам факторов F_i и F_j, не могут находиться в одном связанном множестве с пучком P_{ij}). Поскольку P'_{ij} образует контрасты, элементы которых зависят только от уровней факторов F_i и F_j, эти контрасты есть эффекты взаимодействия факторов F_i и F_j. А контрасты, отвечающие всем пучкам P_{ij}, образуют полное множество из $(s-1)^2$ эффектов взаимодействия факторовF_i и F_j.

Продолжая эти рассуждения по индукции, получим следующее утверждение.

Теорема 6.4.2. Если план включает все комбинации уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_t}$, или, что то же самое, среди определяющих пучков нет пучка, имеющего в качестве нулевых координат одновременно все координаты, отличные от $a_{i_1}, \dots, a_{i_t}$, то все пучки, соответствующие эффектам взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_t}$ в $\mathbf{D}^f$, порождают пучки параллельных плоскостей в **D**, соответствующие полному набору эффектов взаимодействия этих же факторов в **D**.

Независимые эффекты получим, если будем выбирать соответствующие им пучки не более чем по одному из каждого связанного множества.

Пример 6.4.1. Рассмотрим полный симметричный план 3^4 (план $\mathbf{D}^f$), а также план **D** из 9 точек, задаваемый двумя независимыми уравнениями

$$\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 = 0, \quad \chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_4 = 0.$$

Генераторами плана **D** будут пучки $P(1,1,2,0)$ и $P(1,2,0,2)$. Четыре определяющих пучка есть $P(1,1,2,0)$, $P(1,2,0,2)$, $P(1,0,1,1)$ и $P(0,1,1,2)$. Они образуют связанное множество определяющих пучков. Очевидно, что в плане **D** никакие три фактора не содержат всех комбинаций своих уровней. Это эквивалентно тому, что найдется определяющий пучок с любой нулевой координатой.

Имеется четыре связанных множества неопределяющих пучков, каждое из которых содержит по 9 пучков.

Связанные множества

Первое	**Второе**	**Третье**	**Четвертое**
$P(1,0,0,0)$	$P(0,1,0,0)$	$P(0,0,1,0)$	$P(0,0,0,1)$
$P(1,2,1,0)$	$P(1,2,2,0)$	$P(1,1,0,0)$	$P(1,1,2,1)$
$P(1,1,0,1)$	$P(1,0,0,2)$	$P(1,2,1,2)$	$P(1,2,0,0)$
$P(1,0,2,2)$	$P(1,1,1,1)$	$P(1,0,2,1)$	$P(1,0,1,2)$
$P(1,1,1,2)$	$P(0,1,2,1)$	$P(0,1,2,2)$	$P(0,1,1,0)$
$P(0,1,2,0)$	$P(1,0,2,0)$	$P(1,1,1,0)$	$P(1,1,2,2)$

$P(0,1,0,1)$	$P(1,1,0,2)$	$P(1,2,2,2)$	$P(1,2,0,1)$
$P(0,0,1,1)$	$P(1,2,1,1)$	$P(1,0,0,1)$	$P(1,0,1,0)$
$P(1,2,2,1)$	$P(0,0,1,2)$	$P(0,1,0,2)$	$P(0,1,1,1)$

Независимое множество эффектов можно получить, если выбирать соответствующие пучки не более чем по одному из каждого связанного множества. Например, такими пучками будут пучки $P(1,0,0,0)$, $P(0,1,0,0)$, $P(0,0,1,0)$ и $P(0,0,0,1)$. Каждый из этих пучков обладает двумя степенями свободы, соответствующими главным эффектам факторов F_1, F_2, F_3 и F_4.

В качестве другого множества независимых эффектов можно выбрать контрасты, соответствующие четырем пучкам $P(0,1,0,0)$ и $P(0,0,1,0)$ из второго и третьего множеств и $P(0,1,2,0)$ и $P(0,1,1,0)$ из первого и четвертого множеств соответственно. Первые два пучка порождают главные эффекты факторов F_2 и F_3, вторые два пучка порождают все их эффекты взаимодействия.

§ 5. Определяющее соотношение

Рассмотрим геометрический план **D**, задаваемый l независимыми уравнениями (6.3.1). Будем называть следующее соотношение определяющим для плана **D**:

$$\begin{aligned}
&0 = a_{11}\chi_1 + \cdots + a_{m1}\chi_m = a_{12}\chi_1 + \cdots + a_{m2}\chi_m = \cdots \\
&= a_{1l}\chi_1 + \cdots + a_{ml}\chi_m = (a_{11} + a_{12})\chi_1 + \cdots \\
&+(a_{m1} + a_{m2})\chi_m = \cdots = [a_{11} + (s-1)a_{12}]\chi_1 + \cdots \\
&+[a_{m1} + (s-1)a_{m2}]\chi_m = \cdots \\
&= [a_{11} + \cdots + a_{1l}]\chi_1 + \cdots + [a_{m1} + \cdots + a_{ml}]\chi_m = \cdots \\
&= [a_{11} + (s-1)a_{12} + \cdots + (s-1)a_{1l}]\chi_1 + \cdots \\
&+[a_{m1} + (s-1)a_{m2} + \cdots + (s-1)a_{ml}]\chi_m.
\end{aligned} \tag{6.5.1}$$

Коэффициенты в различных частях соотношения (6.5.1) совпадают с координатами определяющих пучков. Так называемое стандартное определяющее соотношение получается из определяющего соотношения (6.5.1) умножением каждой из его частей на такой элемент $\lambda \in GF(s)$, чтобы первый ненулевой коэффициент этой части был равен единице. Так, для примера 6.4.1 стандартным определяющим соотношением будет соотношение

$$0 = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 = \chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_4 = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4 = \chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4.$$

По теореме 6.3.1 геометрический план **D** есть гиперкуб мощности t тогда и только тогда, когда не существует части определяющего соотношения (6.5.1), содержащей менее $t+1$ ненулевых коэффициентов.

§ 6. Проблема упаковки

Определение 6.6.1. Множество из m точек проективной геометрии $PG(n-1,s)$ называется (m,t)-множеством, если никакие t из них не лежат в пространстве размерности не выше, чем $t-2$.

В соответствии с результатами §3 главы 6 существование (m,t)-множества в $PG(n-1,s)$ влечет за собой существование ортогональной таблицы (s^n,m,s,t). И существование геометрического способа построения ортогональной таблицы (s^n,m,s,t) влечет за собой существование (m,t)-множества в $PG(n-1,s)$.

Далее в некоторых частных случаях будем использовать этот факт для построения ортогональных таблиц и стремиться к построению таких (m,t)-множеств, которые отвечают максимальному значению m.

Определение 6.6.2. (m,t)-множество называется полным, если не существует (m',t)-множества с $m'>m$. Число m, отвечающее полному (m,t)-множеству в $PG(n-1,s)$, обозначается через $m_t(n,s)$.

Построение (m,t)-множеств и, в частности, полных (m,t)-множеств необходимо также и при разбиении планирования на блоки (§7 главы 8).

Проблема нахождения полных (m,t)-множеств и значений $m_t(n,s)$ носит название проблемы упаковки. В том случае, когда значение $m_t(n,s)$ неизвестно, важным является получение хороших верхних границ для $m_t(n,s)$.

Теорема 6.6.1 [5,6].

$$m_2(n,s)=(s^n-1)/(s-1).$$

Этот случай будет подробно изучен в §7 этой главы.

Теорема 6.6.2 [1].

$$m_3(n,s)=2^{n-1}.$$

Доказательство теоремы приводится в §4 главы 7.

Теорема 6.6.3 [1].

$$m_3(3,s)=\begin{cases} s+1, & \text{когда } s \text{ нечетное,} \\ s+2, & \text{когда } s \text{ четное.}\end{cases}$$

Доказательство приводится в §3 главы 7.

Теорема 6.6.4 [7].

$$m_4(4,2)=5;\quad m_4(6,2)=8;$$
$$m_4(5,2)=6;\quad m_4(7,2)=11.$$

Доказательство теоремы приводится в §4 главы 7.

Для следующих двух теорем не будем давать доказательств, а только приведем соответствующие полные (m,t)-множества.

Теорема 6.6.5 [8].

$m_4(4,s) = \max(5, s+1)$.

Для $s = 2, 3$ и 4 множество из пяти точек (вектор-столбцов) таких, что никакие четыре из них не являются линейно зависимыми, образуют матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для $s > 4$ таким множеством будут столбцы следующей матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{s-2} \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & a^4 & a^6 & \cdots & a^{2s-4} \\ 0 & 1 & 1 & a^3 & a^6 & a^9 & \cdots & a^{3s-6} \end{Vmatrix},$$

где a – примитивный элемент $GF(s)$. Действительно, рассмотрим подматрицу $\mathbf{C}'$ матрицы $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^{i_1} & a^{i_2} & a^{i_3} & a^{i_4} \\ (a^2)^{i_1} & (a^2)^{i_2} & (a^2)^{i_3} & (a^2)^{i_4} \\ (a^3)^{i_1} & (a^3)^{i_2} & (a^3)^{i_3} & (a^3)^{i_4} \end{Vmatrix}.$$

Определитель $\mathbf{C}'$ есть определитель Вандермонда и поэтому

$$\det \mathbf{C}' = \prod_{j<l} \left(a^{i_j} - a^{i_l}\right) \ (j, l = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Элементы a^i во второй строке матрицы $\mathbf{C}$ различны, поэтому $a^{i_j} \neq a^{i_l}$ и, следовательно, $\det \mathbf{C}' \neq 0$.

Аналогичным образом можно показать, что любая подматрица (4×4) матрицы $\mathbf{C}$ имеет отличный от нуля определитель.

Теорема 6.6.6 [8].

$m_4(5,3) = 11$.

Множество из 11 точек (вектор-столбцов) таких, что никакие четыре из них не являются линейно-зависимыми, образуют следующую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Приведем без доказательства еще несколько теорем.

Теорема 6.6.7 [1, 9].

$m_3(4, s) = s^2 + 1.$

Теорема 6.6.8 [10].

$m_3(n, s) < s^{n-2} + 1 \quad (s > 2,\ n \geq 4).$

Теорема 6.6.9 [11].

$m_3(n, s) \leq s^{n-2} - (s-5)\sum_{i=0}^{n-5} s^i + 1 \ \ (n \geq 5, s \geq 7 - \text{нечетное})$,
$m_3(5, 5) \leq 124,$
$m_3(n, 5) \leq s^{n-2} - 10\sum_{i=0}^{n-6}(5^i - 1) \ \ (n \geq 6),$
$m_3(5, s) \leq s^3 \ \ (s \text{ четное}),$
$m_3(n, s) \leq s^{n-2} - s\sum_{i=0}^{n-6} s^i \ \ (s \text{ четное}, n \geq 6).$

Теорема 6.6.10 [12]. $m_3(n, s)$ не превышает положительного корня уравнения

$$x^2(s^2 - s - 1) - x\{(s^2 - 2s - 1) + (n + x)(s - 2)\} - 2(n + x) = 0,$$

если $s > 2$ и $n \geq 4$.

Теорема 6.6.11 [8].

$m_4(5, s) \leq s(s-1) \quad (s \geq 4),$
$m_4(n, s) \leq s^{n-3} - (s+1)\sum_{j=0}^{n-5} s^j + 1 \quad (n \geq 6,\ s \geq 4).$

§ 7. Построение планов мощности 2

Изучение вопроса о построении симметричных факторных планов из проективных геометрий начнем со способа построения регулярного симметричного факторного плана мощности 2 для $s + 1$ факторов, каждый из которых имеет s уровней в $N = s^2$ опытах из конечной проективной плоскости порядка s.

Возьмем любую прямую в $PG(2, s)$. Вследствие теоремы 1.2.1 она содержит $s + 1$ точку. Эти точки обозначим $F_0, \dots, F_s$. Поставим в соответствие с каждой из этих точек фактор, который обозначим той же буквой, что и точку. Каждой точке, не лежащей на прямой $F_0, \dots, F_s$, поставим в соответствие опыт плана. Таким образом, число факторов будет равно $s + 1$, число опытов – $(s^2 + s + 1) - (s + 1) = s^2$.

Через заданную точку F_i вследствие теоремы 1.2.1 проходит, кроме прямой $F_0, \dots, F_s$, еще s прямых. Поставим в соответствие с каждой из этих прямых по одному из s уровней фактора F_i (все точки любой из этих прямых отвечают одному и тому же уровню). Полученный план обозначим через $\mathbf{D}(2,s)$.

Теорема 6.7.1. План $\mathbf{D}(2,s)$ есть регулярный факторный план мощности 2.

Доказательство. Так как каждая пара точек лежит только на одной прямой, то имеется ровно по одной прямой, проходящей через точку F_i и точку, не лежащую на прямой $F_0,\dots,F_s$. Это значит, что каждому опыту отвечает ровно один уровень каждого фактора.

Так как любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, то встречаются все комбинации для любых двух факторов ровно один раз.

Таким образом, план $\mathbf{D}(2,s)$ – ортогональная таблица мощности 2 индекса 1.

Пример 6.7.1. Иллюстрируем сказанное на примере проективной плоскости порядка 2. Рассмотрим рис. 1 (см. §2 главы 1) с изображенной на нем $PG(2,2)$. Выберем любую прямую, например ту, которая изображена окружностью. Точкам этой прямой поставим в соответствие факторы F_1,F_2,F_3. Остальным точкам поставим в соответствие опыты 1, 2, 3 и 4 (рис. 7).

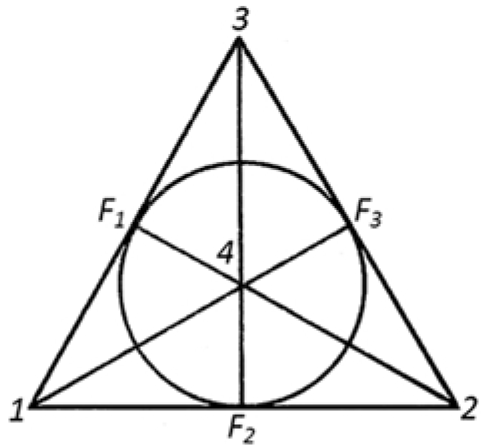


Рис. 7. Проективная геометрия $PG(2,2)$,
и построение ортогональной таблицы (4, 3, 2, 2)

Теперь нужно определить, какой уровень принимает данный фактор в данном опыте, то есть необходимо заполнить клетки табл. 5. Через точку F_1 проходят две прямые (кроме F_1,F_2,F_3): прямая $(F_1,4,2)$ и прямая $(1,F_1,3)$. Поэтому в опытах 1 и 3 фактор F_1 принимает одно из двух возможных значений (обозначим его через 0), а в опытах 2 и 4 – другое значение (обозначим его через 1). Через точку F_2 проходят также две прямые (кроме

F_1, F_2, F_3): прямая $(1, F_2, 2)$ и прямая $(3, 4, F_2)$. Поэтому в опытах 1 и 2 фактор F_2 принимает значение 0, а в опытах 3 и 4 – значение 1. Через точку F_3 проходят две прямые (кроме F_1, F_2, F_3): $(1, 4, F_3)$ и $(2, F_3, 3)$. Поэтому в опытах 1 и 4 фактор F_3 принимает значение 0, а в опытах 2 и 3 — значение 1. Этот план записан в табл. 5 и, очевидно, представляет собой ортогональную таблицу (4, 3, 2, 2), то есть регулярный план для трехуровневых факторов мощности 2.

Таблица 5

Построение ортогональной таблицы (4, 3, 2, 2)

Номер опыта	Фактор		
	F_1	F_2	F_3
1	0	0	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	1	0

Следуя C.R. Rao [13], рассмотрим метод построения ортогональных таблиц из проективных геометрий $PG(n, s)$. В $PG(n, s)$ имеется $(s^n - 1)/(s - 1)$
$(n-2)$-плоскостей на бесконечности вида

$$\chi_0 = 0, \quad a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0 \quad \big(a_i \in GF(s)\big). \tag{6.7.1}$$

Через $(n-2)$-плоскость (6.7.1) проходит связка из s $(n-1)$-плоскостей, задаваемых уравнениями

$$a_{0i}\chi_0 + a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0 \quad \big(a_{0i} \in GF(s)\big). \tag{6.7.2}$$

Вершине (6.7.1) связки плоскостей (6.7.2) поставим в соответствие фактор, который обозначим через $(a_1, \dots, a_n)$. Число различных связок плоскостей, а следовательно, и число факторов $(a_1, \dots, a_n)$ равно $(s^n - 1)/(s - 1)$. Разумеется, не будем различать факторы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(\rho a_1, \dots, \rho a_n)$ $(\rho \neq 0)$. Поэтому координаты $(a_1, \dots, a_n)$ факторов (как и пучков связок плоскостей) представим в таком виде, чтобы первая ненулевая координата была равна 1.

В $PG(n, s)$ имеется s^n конечных точек $(1, \chi_1, \dots, \chi_n)$, и через каждую из них проходит точно одна $(n-1)$-плоскость каждой из $(s^n - 1)/(s - 1)$ связок $(n-1)$-плоскостей. Конечной точке поставим в соответствие опыт. Будем считать, что фактор $(a_1, \dots, a_n)$ поддерживается в опыте $(1, \chi_1, \dots, \chi_n)$ на i-м уровне, если точка $(1, \chi_1, \dots, \chi_n)$ лежит в i-й плоскости (6.7.2) связки с вершиной в плоскости (6.7.1).

Таким образом, получим план в s^n опытах для $(s^n-1)/(s-1)$ факторов, каждый из которых поддерживается на s уровнях. Легко проверить, что этот план представляет собой ортогональную таблицу $(s^n,(s^n-1)/(s-1),s,2)$ мощности 2. Действительно, степени свободы для факторов $(a_1,\dots,a_n)$ совпадают со степенями свободы эффектов взаимодействия в плане s^n тех факторов, которые соответствуют ненулевым координатам $a_1,\dots,a_n$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 6.1.1, получим, что любая комбинация уровней двух различных факторов $(a_1,\dots,a_n)$ и $(a'_1,\dots,a'_n)$ встречается в плане точно s^{n-2} раз. Это число и будет индексом ортогональной таблицы.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.7.2 [13]. Пусть $s=p^h$ (p простое, h целое). Тогда существует ортогональная таблица $(s^n,(s^n-1)/(s-1),s,2)$.

Предложенный метод построения эквивалентен заданию подмножества полного факторного плана s^m $(m=(s^n-1)/(s-1))$ при помощи следующих $l=(s^n-1)/(s-1)-n$ независимых уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\dots+a_{1n}\chi_n-\chi_{n+1}=0,\\
&a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\dots+a_{2n}\chi_n-\chi_{n+2}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{l1}\chi_1+a_{l2}\chi_2+\dots+a_{ln}\chi_n-\chi_{n+l}=0,
\end{aligned} \tag{6.7.3}$$

где a_{ij} $(i=1,\dots,l;\ j=1,\dots,n)$ – j-я координата -го пучка в $PG(n,s)$ (пучки, соответствующие главным эффектам, не рассматриваются). Таким образом, коэффициенты системы (6.7.3) дают координаты генераторов плана.

Очевидно, что утверждение теоремы 6.6.1 следует из теоремы 6.7.2 и неравенства (5.2.5).

Пример 6.7.2. Иллюстрируем изложенный метод на примере построения ортогональной таблицы (27, 13, 3, 2).

Таблицу будем строить при помощи проективной геометрии $PG(3,3)$. В этой геометрии имеется 40 точек. Из них 13 – на бесконечности. Вершины, соответствующие связкам (7.2.2), есть (1, 0, 0), (0, 1,0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2). Эти вершины соответствуют 13 факторам, которые обозначим соответственно через $F_1,\dots,F_{13}$. Если 27 конечных точек, соответствующих 27 опытам, расположить в виде матрицы (27×3), то первый столбец будет соответствовать уровням фактора F_1, второй – F_2 и третий – F_3. Уровни фактора F_4 можно получить, суммируя первые два столбца, F_5 – суммируя первый и удвоенный второй столбцы и т.д. (в данном случае сложение и умножение производятся в поле классов вычетов по модулю 3). Искомый план записан в табл. 6.

Таблица 6

Ортогональная таблица (27, 13, 3, 2)

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
(100)	(010)	(001)	(110)	(120)	(101)	(102)	(011)	(012)	(111)	(112)	(121)	(122)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
2	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	2	2
0	1	0	1	2	0	0	1	1	1	1	2	2
1	1	0	2	0	1	1	1	1	2	2	0	0
2	1	0	0	1	2	2	1	1	0	0	1	1
0	2	0	2	1	0	0	2	2	2	2	1	1
1	2	0	0	2	1	1	2	2	0	0	2	2
2	2	0	1	0	2	2	2	2	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2
1	0	1	1	1	2	0	1	2	2	0	2	0
2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	0	1
0	1	1	1	2	1	2	2	0	2	0	0	1
1	1	1	2	0	2	0	2	0	0	1	1	2
2	1	1	0	1	0	1	2	0	1	2	2	0
0	2	1	2	1	1	2	0	1	0	1	2	0
1	2	1	0	2	2	0	0	1	1	2	0	1
2	2	1	1	0	0	1	0	1	2	0	1	2
0	0	2	0	0	2	1	2	1	2	1	2	1
1	0	2	1	1	0	2	2	1	0	2	0	2
2	0	2	2	2	1	0	2	1	1	0	1	0
0	1	2	1	2	2	1	0	2	0	2	1	0
1	1	2	2	0	0	2	0	2	1	0	2	1
2	1	2	0	1	1	0	0	2	2	1	0	2
0	2	2	2	1	2	1	1	0	1	0	0	2
1	2	2	0	2	0	2	1	0	2	1	1	0
2	2	2	1	0	1	0	1	0	0	2	2	1

Этот же план можно задать как подмножество точек полного плана 3^{13} при помощи следующей системы из 10 независимых уравнений:

$$\begin{array}{ll}
\chi_1+\chi_2-\chi_4=0, & \chi_1+2\chi_2-\chi_5=0,\\
\chi_1+\chi_3-\chi_6=0, & \chi_1+2\chi_3-\chi_7=0,\\
\chi_2+\chi_3-\chi_8=0, & \chi_2+2\chi_3-\chi_9=0,\\
\chi_1+\chi_2+\chi_3-\chi_{10}=0, & \chi_1+\chi_2+2\chi_3-\chi_{11}=0,\\
\chi_1+2\chi_2+\chi_3-\chi_{12}=0, & \chi_1+2\chi_2+2\chi_3-\chi_{13}=0.
\end{array}$$

§ 8. Построение компромиссных планов

Опишем три класса так называемых компромиссных симметричных факторных планов Аддельмана (S. Addelman) [14], которые являются регулярными геометрическими планами для множества Ω, содержащего, помимо всех главных эффектов, некоторые двухфакторные эффекты взаимодействия.

Первый класс планов отвечает факторному множеству Ω, содержащему главные эффекты всех факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия среди заданных k факторов.

Второй класс планов соответствует факторному множеству Ω, содержащему главные эффекты всех факторов, все двухфакторные эффекты взаимодействия среди заданных k факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия среди остальных факторов.

Третий класс планов отвечает факторному множеству Ω, содержащему главные эффекты всех факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия факторов, среди которых находится, по крайней мере, один из k заданных.

Очевидно, что указанные типы компромиссных планов не покрывают все случаи компромиссных планов, но они важны для приложений и пригодны в большинстве практических ситуаций, когда требуется рассмотрение всех главных эффектов и части эффектов взаимодействия первого порядка.

Первый класс

Будем искать планы, отвечающие следующему множеству попарно ортогональных контрастов: главные эффекты всех факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия среди заданных k факторов с числами уровней ($s = p^h$, p простое). Эти заданные k факторов назовем взаимодействующими.

Построим сначала в соответствии с §7 этой главы регулярный симметричный план главных эффектов для $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов в s^n опытах. Каждый из этих $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов будет отвечать вершине (6.7.1) связки плоскостей (6.7.2) в $PG(n, s)$. В качестве взаимодействующих факторов выберем те, которым отвечают вершины связок плоскостей, удовлетворяющие условию: не существует нетривиальной линейной комбинации никаких четырех (или менее) из них, равной нулю. Очевидно, главные эффекты и двухфакторные эффекты взаимодействия взаимодействующих факторов будут образовывать множество попарно ортогональных контрастов.

Вычеркнем те вершины связок, которые представляются в виде линейной комбинации каких-либо двух вершин, отвечающих взаимодействующим факторам. В этом случае все главные эффекты оставшихся невзаимодействующих факторов будут ортогональны между собой и ортогональны главным эффектам и эффектам взаимодействия первого порядка взаимодействующих факторов.

Пример 6.8.1. Рассмотрим регулярный симметричный план для семи двухуровневых факторов в восьми опытах. Каждый из этих факторов будет отвечать следующим вершинам связок параллельных плоскостей:

$$F_1 \to (100), \quad F_2 \to (010), \quad F_3 \to (001), \quad F_4 \to (110)$$
$$F_5 \to (101), \quad F_6 \to (011), \quad F_7 \to (111).$$

В качестве взаимодействующих факторов выберем, например, F_4 и F_5. Сумма соответствующих им вершин есть (011). Поэтому вершину (011) и соответствующий ей фактор F_6 следует вычеркнуть. Полученный план

$$\begin{array}{cccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_7 \end{array}$$
$$\left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

дает множество попарно ортогональных главных эффектов факторов $F_1, F_2, F_3,$ F_4, F_5, F_7 и эффекта взаимодействия факторов F_4 и F_5.

Второй класс

Этот класс компромиссных планов отвечает факторному множеству Ω, содержащему все главные эффекты а также все двухфакторные эффекты взаимодействия среди заданных k факторов (первого подмножества взаимодействующих факторов) и все двухфакторные эффекты взаимодействия среди остальных факторов (второго подмножества взаимодействующих факторов). Числа уровней всех факторов, как и прежде, равны $s = p^h$ (p простое).

Сначала рассмотрим регулярный симметричный план главных эффектов для $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов в s^n опытах. В качестве первого подмножества взаимодействующих факторов выберем те, которым отвечают вершины связок плоскостей, удовлетворяющие условию: не существует нетривиальной линейной комбинации никаких четырех из них, равной нулю. Вычеркнем те вершины связок, которые представляются в виде линейной комбинации каких-либо двух вершин, соответствующих взаимодействующим факторам.

Из оставшихся связок выберем те, которые удовлетворяют двум требованиям:

1) не существует нетривиальной линейной комбинации никаких четырех из них, равной нулю;

2) не существует нетривиальной линейной комбинации никаких двух из них, дающей линейную комбинацию каких-либо двух вершин взаимодействующих факторов первого подмножества.

Пример 6.8.2. Построим план для шести трехуровневых факторов в 81 опыте, который соответствует факторному множеству Ω, содержащему главные эффекты всех шести факторов, двухфакторные эффекты взаимодействия одного множества из трех факторов и двухфакторные эффекты взаимодействия множества из остальных трех факторов. Рассмотрим регулярный симметричный план главных эффектов для 40 трехуровневых факторов в 81 опыте, которые в соответствии с §7 этой главы представляются 40 вершинами связок параллельных плоскостей. Выберем вершины (1000), (0100), (0010) связок в качестве факторов из первого подмножества взаимодействующих факторов. Эти вершины, а также все их линейные комбинации (1100), (1200), (1010), (1020), (0110) и (0120) не могут входить во второе подмножество взаимодействующих факторов. В то же время очевидно, что вершины (0001), (1110), (1121) могут представлять факторы второго подмножества. Легко проверить, что никакая четвертая вершина не может быть включена во второе подмножество.

Третий класс

Этому классу отвечает факторное множество Ω, содержащее главные эффекты всех факторов, все двухфакторные эффекты взаимодействия факторов, среди которых находится по крайней мере один из k заданных. Как и прежде, будем строить такие планы из симметричного плана главных эффектов для $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов в s^n опытах. В качестве множества из k заданных факторов выберем такие вершины связок параллельных плоскостей, чтобы не существовало нетривиальной линейной комбинации никаких четырех из них, равной нулю. Вычеркнем те вершины, которые являются линейными комбинациями трех из заданных. Из остальных вершин выберем лишь те, которые удовлетворяют требованию: не существует нетривиальной линейной комбинации двух из них и двух из m заданных вершин (факторов), равной нулю. Очевидно, что выбранный таким способом план удовлетворяет всем требованиям, сформулированным для компромиссного плана, принадлежащего третьему классу.

Пример 6.8.3. Построим двухуровневый план в 64 опытах такой, что главные эффекты всех факторов и двухфакторные эффекты взаимодействия, отвечающие по крайней мере одному из четырех выбранных факторов, были попарно ортогональны. Для этого рассмотрим регулярный симметричный план главных эффектов для 63 двухуровневых факторов в 64 опытах. В качестве заданного множества взаимодействующих факторов выберем четыре вершины связок параллельных плоскостей: (100000), (010000), (001000), (000100). В этом случае исключим из дальнейшего рассмотрения все вершины, для которых выполняются одновременно следующих два условия: две последние координаты равны нулю, и среди первых четырех имеется по крайней мере одна нулевая координата. Из оставшихся вершин следующие семь, очевидно, удовлетворяют всем сформулированным требованиям: (000010), (000001), 000011), (111100), (111110), (111101) и (111111).

§ 9. Двухуровневые планы

Геометрический двухуровневый факторный план **D**, как и любой геометрический план, является равномерным. Это означает, что любой уровень любого фактора встречается в таком плане ровно $N/2$ раз (N – число опытов плана). Поэтому чебышевская модель будет совпадать с A^{Ω}-моделью истинных эффектов. Полная факторная модель при этом будет иметь вид

$$\begin{aligned} &Ey = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_mx_m + b_{12}x_1x_2 + \cdots \\ &+b_{1\ldots m}x_1 \ldots x_m, \end{aligned} \tag{6.9.1}$$

где $x_i = 1$ для одного уровня фактора и $x_i = -1$ для другого уровня.

Рассмотрим две матрицы плана **D**: $\mathbf{D}_F = \{\chi_{iu}\}$ $[\chi_{iu} \in GF(2)]$ и $\mathbf{D} = \{x_{iu}\}$, где χ_{iu} и x_{iu} принимают соответственно значения 0 и +1, если фактор F_i поддерживается в u-м опыте на уровне 0 и значения соответственно 1 и –1, если фактор F_i поддерживается в u-м опыте на уровне 1. Тогда, очевидно, следующие два равенства эквивалентны:

$$\chi_{i_1u} + \cdots + \chi_{i_ru} = 0,$$

$$x_{i_1u} \ldots x_{i_ru} = 1.$$

Вследствие этого систему генерирующих соотношений (6.3.1) для геометрического двухуровневого плана **D** можно записать в виде

$$\begin{aligned} &x_1^{a_{11}} \ldots x_m^{a_{m1}} = 1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &x_1^{a_{1l}} \ldots x_m^{a_{ml}} = 1, \end{aligned} \tag{6.9.2}$$

где $a_{ij} \in GF(2)$ ($a_{ij} = 0$ или 1), $l = m - k$.

Система (6.9.2) в соответствии с §3 главы 1 определяет подмножество из 2^k точек ($k = m - l$) полного плана 2^m.

Выражения вида $x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m}$ ($a_1, \ldots, a_m = 0$ или 1) будем называть взаимодействиями (в отличие от понятий эффектов взаимодействия), а также будем их называть r-буквенными взаимодействиями, если ровно r чисел из a_i ($i = 1, \ldots, m$) равны 1. Будем использовать понятия генерирующих, определяющих, независимых взаимодействий по аналогии с понятиями генерирующих, определяющих, независимых плоскостей, то есть равенств вида (6.3.1). Генерирующие взаимодействия будем также называть генераторами.

Элементарное преобразование множества взаимодействий сводится к умножению одного взаимодействия на некоторые другие взаимодействия из этого множества.

Пусть $\mathbf{X}^f$ – матрица коэффициентов полного плана 2^m (плана $\mathbf{D}^f$) для полной факторной модели (6.9.1). Как простое следствие теоремы 3.4.1 и замечания 1 к ней получим следующую теорему.

Теорема 6.9.1. Матрица $\mathbf{X}^f$ есть квадратная матрица с элементами +1 и –1; все столбцы матрицы $\mathbf{X}^f$ попарно ортогональны; значения x_i и $x_{i_1} \dots x_{i_r}$ в точках плана $\mathbf{D}^f$ образуют, соответственно, вектор главного эффекта фактора F_i и вектор эффекта взаимодействия факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$.

В матрицах планов и в матрицах коэффициентов будем иногда вместо +1 и –1 записывать + и – соответственно.

Рассмотрим матрицу полного плана 2^m (плана $\mathbf{D}^f$) и ее подматрицу: матрицу плана $\mathbf{D} = \{x_{iu}\}$, задаваемую генерирующими соотношениями

$$1 = R_1, \dots, 1 = R_l, \qquad (6.9.3)$$

где $R_1, \dots, R_l$ – l независимых взаимодействий $(l < m)$.

Выберем теперь в $\mathbf{X}^f$ строки, соответствующие плану **D.** Полученную матрицу обозначим через $\widetilde{\mathbf{X}}$. Через **X** обозначим матрицу, в которую входят по одному представителю от каждого множества одинаковых столбцов матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$.

Теорема 6.9.2. Для плана **D**, задаваемого генерирующими соотношениями (6.9.3), справедливы утверждения:

1. Матрица $\widetilde{\mathbf{X}}$ имеет размер $2^{m-l} \times 2^m$; 2^m столбцов матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$ разделены на 2^{m-l} связанных множеств, в каждом из которых столбцы совпадают. Столбцы из различных связанных множеств попарно ортогональны.

2. Из плана **D** можно выбрать $m - l$ столбцов, составляющих полный план 2^{m-l} (план $\mathbf{D}_l^f$). Среди выбранных $m - l$ столбцов нет таких, произведение которых (в смысле определения 3.4.1) соответствует определяющему взаимодействию.

3. Матрица **X** совпадает с матрицей коэффициентов плана $\mathbf{D}_l^f$ для полной факторной модели.

Доказательство. Утверждение 1 теоремы следует из теоремы 6.4.1. Доказательство п. 2 и 3 будем проводить индукцией по l. Пусть $l = 1$. И пусть $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{X}_1$ – матрицы, содержащие те строки $\mathbf{D}^f$ и $\mathbf{X}^f$ соответственно, которые удовлетворяют первому генерирующему соотношению $1 = R_1$.

Вычеркнем из m столбцов $\mathbf{D}_1$ столбец, отвечающий x_i, если x_i входит во взаимодействие R_1. Тогда остальные $m - 1$ столбцов составят полный план 2^{m-1} (план $\mathbf{D}_1^f$), так как в $\mathbf{D}_1^f$ не найдется двух одинаковых строк. Действительно, предположим, что такие две строки существуют. Тогда на пересечении этих строк с вычеркнутым столбцом стоят различные знаки (в противном случае получим две совпадающие строки в $\mathbf{D}^f$, что невозможно). Поэтому столбец, отвечающий взаимодействию R_1, имеет на пересечении с этими строками разные знаки, что также невозможно.

Наконец, утверждение 3 теоремы для $l = 1$ очевидно, так как $\mathbf{X}_1$ содержит всевозможные произведения по 1, по $2, \ldots$, по $m-1$ столбцов матрицы полного плана 2^{m-1} и столбец из +1.

Предположим теперь, что при $l = n$ теорема 6.9.2 справедлива для плана $\mathbf{D}_n$, задаваемого генерирующими соотношениями

$$1 = R_1, \ldots, 1 = R_n.$$

Докажем, что она справедлива и при $l = n + 1$ для плана $\mathbf{D}_{n+1}$, задаваемого генерирующими соотношениями

$$1 = R_1, \ldots, 1 = R_n, 1 = R_{n+1}.$$

Пусть

$$Q_1, Q_2 \ldots \tag{6.9.4}$$

– определяющие взаимодействия плана $\mathbf{D}_n$. Тогда, очевидно, определяющими взаимодействиями плана $\mathbf{D}_{n+1}$ будут взаимодействия

$$Q_1,\ Q_2, \ldots, R_{n+1},\ Q_1R_{n+1},\ Q_2R_{n+1} \ldots \tag{6.9.5}$$

По предположению среди выбранных $m - n$ столбцов плана $\mathbf{D}_n$, составляющих полный план $\mathbf{D}_n^f$, нет таких, произведение которых давало бы определяющие взаимодействия (6.9.4). Поэтому среди них нет таких, произведение которых давало бы два или более определяющих взаимодействий (6.9.5). Действительно, если бы существовали два таких взаимодействия, то это были бы взаимодействия типа Q_iR_{n+1} и Q_jR_{n+1}. Произведение их давало бы взаимодействие типа Q_q, что невозможно. Теперь из столбцов, образующих полный план $\mathbf{D}_n^f$, рассмотрим те, произведение которых дает единственное взаимодействие из (6.9.5). Из них вычеркнем любой. Оставшиеся $m - n - 1$ столбцов, очевидно, образуют полный план 2^{m-n-1} $\left(D_{n+1}^f\right)$, и среди этих столбцов нет таких, произведение которых давало бы взаимодействие определяющего соотношения (6.9.5). Таким образом, теорема доказана.

Пример 6.9.1. Рассмотрим матрицу $\mathbf{D}^f$ полного плана 2^5 и образуем дробный план, задаваемый генерирующими соотношениями

$$1 = x_1x_2x_4,\ \ 1 = x_1x_2x_3x_5. \tag{6.9.6}$$

Матрица этого дробного плана имеет вид

$$\mathbf{D}_2 = \begin{Vmatrix} + & - & + & - & - \\ - & + & + & - & - \\ - & - & - & + & - \\ + & + & - & + & - \\ + & - & - & - & + \\ - & + & - & - & + \\ - & - & + & + & + \\ + & + & + & + & + \end{Vmatrix}.$$

Матрица коэффициентов $\mathbf{X}^f$ плана $\mathbf{D}^f$ для полной факторной модели имеет размер $2^5 \times 2^5$. Полученная из нее в соответствии с генерирующими соотношениями (6.9.6) матрица $\widetilde{\mathbf{X}}$ имеет размер $2^3 \times 2^5$. После объединения совпадающих столбцов связанных множеств матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$ получим матрицу $\mathbf{X}$ (табл. 7). Каждый из столбцов этой матрицы отмечен четырьмя взаимодействиями, которые показывают, представителями каких четырех столбцов матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$ они являются.

Таблица 7

Матрица X и связанные множества для дробного плана $\mathbf{2^{5-2}}$

1 $x_1x_2x_4$ $x_1x_2x_3x_5$ $x_3x_4x_5$	x_1 x_2x_4 $x_2x_3x_5$ $x_1x_3x_4x_5$	x_2 x_1x_4 $x_1x_3x_5$ $x_2x_3x_4x_5$	x_3 $x_1x_2x_3x_4$ $x_1x_2x_5$ x_4x_5	x_4 x_1x_2 $x_1x_2x_3x_4x_5$ x_3x_5	x_5 $x_1x_2x_4x_5$ $x_1x_2x_3$ x_3x_4	x_1x_3 $x_2x_3x_4$ x_2x_5 $x_1x_4x_5$	x_1x_5 $x_2x_4x_5$ x_2x_3 $x_1x_3x_4$
+	+	−	+	−	−	+	−
+	−	+	+	−	−	−	+
+	−	−	−	+	−	+	+
+	+	+	−	+	−	−	−
+	+	−	−	−	+	−	+
+	−	+	−	−	+	+	−
+	−	−	+	+	+	−	−
+	+	+	+	+	+	+	+

Используем конструктивное доказательство теоремы 6.9.2 для выбора столбцов матрицы $\mathbf{D}_2$, образующих полный план 2^3. Из матрицы плана $\mathbf{D}_2$ вычеркнем сначала любой столбец, отвечающий x_i, если x_i входит в первое генерирующее соотношение (6.9.6) (например, x_4). Из оставшихся столбцов нужно вычеркнуть любой из тех, который входит в единственное взаимодействие определяющего соотношения плана

$$1 = x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_3x_4x_5,$$

образованное произведением части или всех столбцов x_1, x_2, x_3 и x_5. Искомым взаимодействием является $x_1x_2x_3x_5$. Таким образом, вычеркивая любой из столбцов x_1, x_2, x_3 и x_5 (например, x_5), получим матрицу полного плана 2^3:

$$\mathbf{D}_2^f = \begin{array}{c} \\ \left\| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ + & - & + \\ - & + & + \\ - & - & - \\ + & + & - \\ + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \\ + & + & + \end{array} \right\| \end{array}.$$

Матрица $\mathbf{X}$ совпадает с матрицей коэффициентов полного плана $\mathbf{D}_2^f$ для полной факторной модели. Учитывая это обстоятельство при построении плана $\mathbf{D}_2$, можно сразу записать матрицу полного плана 2^3 для переменных x_1, x_2, x_3 и затем, добавив столбцы, соответствующие x_4 и x_5 , с помощью соотношений $x_4 = x_1 x_2$, $x_5 = x_1 x_2 x_3$, получить матрицу плана $\mathbf{D}_2$ (с точностью до перестановок строк и столбцов).

Описанный метод может быть без труда распространен при помощи теоремы 6.9.2 на общий случай построения дробного факторного плана, заданного генерирующими соотношениями (6.9.3).

По теореме 6.9.2 столбцы матрицы $\widetilde{\mathbf{X}}$ разделены на 2^{m-l} множеств, в каждом из которых столбцы совпадают; столбцы из различных множеств ортогональны. Очевидно, что множество, содержащее взаимодействие S, можно найти, умножая на S взаимодействия определяющего соотношения

$$1 = R_1 = R_2 = R_1 R_2 = \cdots = R_1 R_2 \ldots R_l.$$

Таким образом, множество, содержащее взаимодействие S, есть

$$S,\ R_1 S,\ R_2 S,\ R_1 R_2 S, \ldots, R_1 R_2 \ldots R_l S. \tag{6.9.7}$$

Оценить однозначно коэффициенты полной факторной модели (6.9.1) при помощи дробного плана 2^{m-l} (плана $\mathbf{D}$) методом наименьших квадратов не удастся, так как матрица коэффициентов $\widetilde{\mathbf{X}}$ будет содержать, очевидно, одинаковые столбцы и, таким образом, матрица моментов $\widetilde{\mathbf{X}}^T \widetilde{\mathbf{X}}$ будет вырождена. Однако если модель будет содержать по одному взаимодействию от каждого связанного множества, то коэффициенты этой модели удастся оценить (в том смысле, что решение системы нормальных уравнений будет единственным). Действительно, в этом случае матрицей коэффициентов плана $\mathbf{D}$ будет матрица $\mathbf{X}$, имеющая ортогональные столбцы. То же самое можно утверждать для модели, содержащей не более чем по одному представителю от каждого связанного множества взаимодействий. Таким образом, оценку вектора коэффициентов $\widehat{\mathbf{B}}$ этой модели получим по формуле

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2^{m-l}}\mathbf{X}^T\mathbf{y}. \qquad (6.9.8)$$

Если при оценке коэффициентов постулируемой модели

$$E\mathbf{y} = \mathbf{XB},$$

содержащей по одному взаимодействию из каждого связанного множества, при помощи плана **D** окажется, что истинная модель

$$E\mathbf{y} = \mathbf{XB} + \mathbf{X}_0\mathbf{B}_0$$

имеет вид (6.9.1), то получаемые по формулам (6.9.8) оценки будут смещены (матрица $\mathbf{X}_0$ получается из $\widetilde{\mathbf{X}}$, вычеркиванием столбцов, входящих в **X**). Вследствие равенства (2.5.1)

$$E\widehat{\mathrm{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{AB}_0, \qquad (6.9.9)$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}_0$ – матрица смещения.

Сгруппируем совпадающие столбцы в $\mathbf{X}_0$. Тогда матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}_0$ будет иметь размер $2^{m-l} \times 2^{m-l}(2^l - 1)$ и вид

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}_0 = \left\|\begin{matrix} N & \dots & N & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N & \dots & N & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & N & \dots & N \end{matrix}\right\|,$$

где каждая строка содержит $2^l - 1$ элементов, равных N. Таким образом, матрица смещения имеет следующий вид:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Поэтому из равенства (6.9.9) получим систему скалярных равенств. Рассматривая любое из них, получим следующую теорему.

Теорема 6.9.3. Если при оценке коэффициентов модели, содержащей по одному взаимодействию из каждого связанного множества, при помощи плана **D** окажется, что истинная модель имеет вид (6.9.1), то получаемая по формуле (6.9.8) оценка коэффициента, соответствующего взаимодействию *S*, будет смещенной. Смещением будет сумма эффектов, соответствующих взаимодействиям, входящим в одно связанное множество, содержащее *S*.

Таким образом, любая оценка, вычисленная по формуле (6.9.8), является несмещенной оценкой суммы эффектов, соответствующих взаимодействиям, находящимся в одном связанном множестве. Такие эффекты носят название смешанных эффектов.

Далее в этом параграфе мы будем говорить об оценках эффектов, найденных при помощи геометрического плана **D**, предполагая, что модель содержит не более чем по одному взаимодействию из каждого связанного множества.

Пример 6.9.2. Пусть постулируемая модель есть

$$Ey = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$

в то время как истинный вид модели есть

$$Ey = 5 + x_1 + x_2 + 3x_3 + 0{,}3x_1x_2 + 0{,}1x_1x_3. \qquad (6.9.10)$$

Будем использовать геометрический план $2^3//4$ с определяющим соотношением

$$1 = x_1x_2x_3, \qquad (6.9.11)$$

чтобы оценить коэффициенты постулируемой модели**.** Предположим, что в четырех опытах плана **D** получаются результаты, приведенные ниже.

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	−	−	+	$6{,}2 + \varepsilon_1$
2	+	−	−	$1{,}6 + \varepsilon_2$
3	−	+	−	$1{,}8 + \varepsilon_3$
4	+	+	+	$10{,}4 + \varepsilon_4$

Не вычисляя самих оценок коэффициентов модели (6.9.10), найдем смещения этих оценок с помощью соотношения (6.9.9).

Сгруппированная матрица $\widetilde{\mathbf{X}}$ имеет вид

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & x_1x_2x_3 & x_1 & x_2x_3 & x_2 & x_1x_3 & x_3 & x_1x_2 \end{array} \\ \widetilde{\mathbf{X}} = \left\| \begin{array}{cccccccc} + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \right\|. \end{array}$$

Матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_0$ в данном случае совпадают:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = \left\| \begin{array}{cccc} + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{array} \right\|.$$

Поэтому из равенств (6.9.9) получим

$$E \left\| \begin{array}{c} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} b_{123} \\ b_{23} \\ b_{13} \\ b_{12} \end{array} \right\|.$$

Таким образом,

$$E\hat{b}_0 = b_0 + b_{123}; \quad E\hat{b}_1 = b_1 + b_{23};$$
$$E\hat{b}_2 = b_2 + b_{13}; \quad E\hat{b}_3 = b_3 + b_{12}. \tag{6.9.12}$$

К этому результату можно было прийти, используя теорему 6.9.3. Для этого достаточно было умножить взаимодействие определяющего соотношения (6.9.11) последовательно на x_0, x_1, x_2 и x_3 и получить четыре связанных множества взаимодействий и соответствующие смешанные эффекты:

$$\begin{array}{lllllll} 1 & \text{и} & x_1x_2x_3, & \quad & b_0 & \text{и} & b_{123}, \\ x_1 & \text{и} & x_2x_3, & & b_1 & \text{и} & b_{23}, \\ x_2 & \text{и} & x_1x_3, & & b_2 & \text{и} & b_{13}, \\ x_3 & \text{и} & x_1x_2, & & b_3 & \text{и} & b_{12}. \end{array}$$

Используя формулу (6.9.8), получим оценки для коэффициентов модели (6.9.10)

$$\hat{b}_0 = 5 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4}; \qquad \hat{b}_1 = 1 + \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4};$$
$$\hat{b}_2 = 1{,}1 + \frac{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4}; \quad \hat{b}_3 = 3{,}3 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{4}.$$

Так как $E\varepsilon_u = 0$, то $E\hat{b}_0 = 5$, $E\hat{b}_1 = 1$, $E\hat{b}_2 = 1{,}1$, $E\hat{b}_3 = 3{,}3$, что согласуется с соотношениями (6.9.12) для модели (6.9.10).

Изучим далее технику построения семейств геометрических планов, введенную Боксом и Хантером (G.E.P.Box and J.S.Hunter), и дадим ряд теорем, основанных на их идеях [15].

Пусть имеется l генераторов геометрического плана $2^m//2^{m-l}$. Они представляют собой l независимых взаимодействий. Поменяем у некоторых из них знаки. Очевидно, что полученные взаимодействия останутся независимыми. Поэтому с их помощью можно построить геометрический план, который будет отличаться от первоначального. Число всех возможных вариантов изменений знаков при этом будет равно 2^l. Про такие планы говорят, что они принадлежат одному семейству.

Определение 6.9.1. Если генераторы одного из планов семейства имеют только положительные знаки, то эти генераторы называются главными; соответствующее определяющее соотношение называется главным определяющим соотношением, а сам план – главным геометрическим планом семейства.

Набор определяющих соотношений всех планов семейства можно записать с помощью следующего формального выражения:

$$1 = (1 \pm R_1) \dots (1 \pm R_l),$$

где $R_1, \dots, R_l$ – главные генераторы.

Лемма 6.9.1. Если взаимодействия

$$R_1, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots, R_l \qquad (6.9.13)$$

независимы, то взаимодействия

$$R_1, R_1R_2, \dots, R_1R_n, R_{n+1}, \dots, R_l \qquad (6.9.14)$$

также независимы.

Доказательство. Предположим противное, то есть что выполняется соотношение

$$\pm 1 = R_{n+i_1} \dots R_{n+i_p} R_1 R_{j_1} \dots R_1 R_{j_r} \bar{R}_1,$$

где $0 < i_q \le l - n$, $0 < j_v \le n$, $q = 1, \dots, p$, $v = 1, \dots, r$, и $\bar{R}_1$ равно либо R_1, либо 1.

Тогда получим

$$\pm 1 = R_{j_1} \dots R_{j_r} R_{n+i_1} \dots R_{n+i_p} \bar{R}_1.$$

Так как взаимодействия (6.9.13) независимы, получаем противоречие, что и требовалось.

Лемму 6.9.1 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 6.9.2. Если (6.9.13) генераторы плана $2^m//2^{m-l}$, то (6.9.14) – генераторы этого же плана.

Лемма 6.9.3. Для двух планов из одного семейства можно выбрать генераторы таким образом, чтобы все они попарно совпадали, кроме одной пары, в которой генераторы отличались бы знаками.

Доказательство. Пусть имеется два плана $2^m//2^{m-l}$ одного семейства. Первый план имеет генераторы (6.9.13). Генераторы второго плана следующие:

$$-R_1, -R_2, \dots, -R_n, R_{n+1}, \dots, R_l. \qquad (6.9.15)$$

По лемме 6.9.2 взаимодействия (6.9.14) являются генераторами первого плана, а взаимодействия

$$-R_1, R_1R_2, \dots, R_1R_n, R_{n+1}, \dots, R_l \qquad (6.9.16)$$

являются генераторами второго плана, что и требовалось.

Определение 6.9.2. Будем понимать под объединением планов $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_r$ такой план, который содержит все точки (опыты) планов $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_r$.

Подчеркнем, что под объединением планов будем понимать не теоретико-множественное объединение. Так, например, если два плана содержат одинаковую точку, то эта точка будет входить в объединение дважды.

Теорема 6.9.4. Объединение двух геометрических планов $2^m//2^{m-l}$ с генераторами (6.9.13) и (6.9.15) представляет собой также геометрический план $2^m//2^{m-l+1}$ с генераторами

$$R_1R_2, \ldots, R_1R_n, R_{n+1}, \ldots, R_l.$$

Доказательство. Так как взаимодействия (6.9.14) и (6.9.16) являются генераторами соответственно первого и второго планов, то объединение удовлетворяет соотношениям

$$1 = R_1R_2, \ldots, 1 = R_1R_n, 1 = R_{n+1}, \ldots, 1 = R_l. \tag{6.9.17}$$

Очевидно, что взаимодействия в (6.9.17) независимы, а так как их число равно $l-1$, то они являются также и генераторами объединения. Таким образом, теорема доказана.

Так как определяющие соотношения двух геометрических планов одного семейства отличаются только знаками, то каждому связанному множеству взаимодействий одного плана будет отвечать связанное множество взаимодействий другого плана, отличия в которых могут быть только в знаках.

Теорема 6.9.5. Пусть $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ – два геометрических плана $2^m//2^{m-l}$ одного семейства. Тогда 2^{m-l+1} оценок объединения $\mathbf{D}$ этих планов есть полусуммы и полуразности 2^{m-l} пар несмещенных оценок сумм эффектов соответствующих связанных множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$.

Доказательство. Так как определяющее соотношение содержит всевозможные произведения генераторов, то по лемме 6.9.2 половина членов определяющего соотношения (включая 1) плана $\mathbf{D}_1$ будет совпадать с половиной членов определяющего соотношения плана $\mathbf{D}_2$, другие половины будут отличаться знаками. Поэтому в любой паре соответствующих связанных множествах половина взаимодействий ($T_1, \ldots, T_{2^{l-1}}$ в $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$) будет совпадать, а половина ($T_{2^{l-1}+1}, \ldots, T_{2^l}$ в $\mathbf{D}_1$ и $-T_{2^{l-1}+1}, \ldots, -T_{2^l}$ в $\mathbf{D}_2$) – отличаться знаками. Очевидно, что взаимодействия $T_1, \ldots, T_{2^{l-1}}$ будут находиться в одном связанном множестве в $\mathbf{D}$, а взаимодействия $T_{2^{l-1}+1}, \ldots, T_{2^l}$ – в другом. Обозначим через $\mathbf{S}_1$ столбец матрицы коэффициентов плана $\mathbf{D}_1$, соответствующий связанным взаимодействиям $T_1, \ldots, T_{2^{l-1}}$, $T_{2^{l-1}+1}, \ldots, T_{2^l}$, а через S_2 – столбец матрицы коэффициентов для плана $\mathbf{D}_2$, соответствующий взаимодействиям $T_1, \ldots, T_{2^{l-1}}, -T_{2^{l-1}+1}, \ldots, -T_{2^l}$. Тогда столбец матрицы коэффициентов для плана $\mathbf{D}$,соответствующий взаимодействиям $T_1, \ldots, T_{2^{l-1}}$ есть

$$\mathrm{S}' = \left\| \begin{matrix} \mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_2 \end{matrix} \right\|,$$

а взаимодействиям $T_{2^{l-1}+1}, \ldots, T_{2^l}$ – есть

$$S'' = \left\| \begin{matrix} S_1 \\ -S_2 \end{matrix} \right\|.$$

Оценка, соответствующая связанному множеству $T_1, \dots, T_{2^{l-1}}$ в $\mathbf{D}$, есть

$$\frac{1}{2^{m-l+1}}\mathbf{y}_D^T\mathbf{S}' = \frac{1}{2^{m-l}}\mathbf{y}_{D_1}^T\mathbf{S}_1 + \frac{1}{2^{m-l}}\mathbf{y}_{D_2}^T\mathbf{S}_2,$$

где $\mathbf{y}_D$, $\mathbf{y}_{D_1}$ и $\mathbf{y}_{D_2}$ – вектор-столбцы наблюдений соответственно в планах $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$.

Оценка, соответствующая связанному множеству $T_{2^{l-1}+1}, \dots, T_{2^l}$ есть

$$\frac{1}{2^{m-l+1}}\mathbf{y}_D^T\mathbf{S}'' = \frac{1}{2^{m-l}}\mathbf{y}_{D_1}^T\mathbf{S}_1 - \frac{1}{2^{m-l}}\mathbf{y}_{D_2}^T\mathbf{S}_2,$$

что и требовалось.

Пример 6.9.3. Рассмотрим план $2^7//8$ (план $\mathbf{D}'$) с генераторами

$$x_1x_2x_4, \quad x_1x_3x_5, \quad x_2x_3x_6, \quad x_1x_2x_3x_7: \tag{6.9.18}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} - & - & - & + & + & + & - \\ + & - & - & - & - & + & + \\ - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & + & - & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & - & + & - & - \\ - & + & + & - & - & + & - \\ + & + & + & + & + & + & + \end{matrix} \right\| \end{array}. \tag{6.9.19}$$

Определяющее соотношение плана (6.9.19) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= x_1x_2x_4 = x_1x_3x_5 = x_2x_3x_4x_5 = x_2x_3x_6 = x_1x_3x_4x_6 \\ &= x_1x_2x_5x_6 = x_4x_5x_6 == x_1x_2x_3x_7 = x_3x_4x_7 = x_2x_5x_7 \\ &= x_1x_4x_5x_7 = x_1x_6x_7 = x_2x_4x_6x_7 = x_3x_5x_6x_7 \\ &= x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7. \end{aligned} \tag{6.9.20}$$

По формуле (6.9.8) получим восемь оценок

$$\hat{b}_0' = \frac{\sum_{u=1}^8 y_u}{8}, \quad \hat{b}_1' = \frac{\sum_{u=1}^8 x_{1u}y_u}{8}, \dots, \hat{b}_7' = \frac{\sum_{u=1}^8 x_{7u}y_u}{8}.$$

Все эти оценки являются несмещенными оценками сумм смешанных эффектов. Например, для $\hat{b}_1'$ можно записать

$$E\hat{b}_1' = b_1 + b_{24} + b_{35} + b_{12345} + b_{1236} + b_{346} + b_{256} + b_{1456} + b_{237} + b_{1347} + b_{1257} + b_{457} + b_{67} + +b_{12467} + b_{13567} + b_{234567}.$$

Если известно, что трех- и более факторные эффекты взаимодействия равны нулю, то в первом связанном множестве останется только четыре эффекта взаимодействия $b_1, b_{24}, b_{35}, b_{67}$. Поступая аналогичным образом с остальными множествами, получим для всех восьми оценок

$$
\begin{array}{ll}
E\hat{b}'_0 = b_0, & E\hat{b}'_4 = b_4 + b_{12} + b_{56} + b_{37},\\
E\hat{b}'_1 = b_1 + b_{24} + b_{35} + b_{67}, & E\hat{b}'_5 = b_5 + b_{13} + b_{46} + b_{27},\\
E\hat{b}'_2 = b_2 + b_{14} + b_{36} + b_{57}, & E\hat{b}'_6 = b_6 + b_{23} + b_{45} + b_{17},\\
E\hat{b}'_3 = b_3 + b_{15} + b_{26} + b_{47}, & E\hat{b}'_7 = b_7 + b_{34} + b_{25} + b_{16}.
\end{array}
$$

В определяющем соотношении плана $\mathbf{D}'$ поменяем знаки у всех взаимодействий, содержащих x_1. Обозначим полученный геометрический план через $\mathbf{D}''$. Таким образом, генераторами этого плана будут взаимодействия $-x_1x_2x_4$, $-x_1x_3x_5$, $x_2x_3x_6$, $-x_1x_2x_3x_7$. А определяющим будет соотношение

$$
\begin{aligned}
1 &= -x_1x_2x_4 = -x_1x_3x_5 = x_2x_3x_6 = -x_1x_2x_3x_7 = x_2x_3x_4x_5\\
&= -x_1x_3x_4x_6 = x_3x_4x_7 = -x_1x_2x_5x_6 = x_2x_5x_7 = -x_1x_6x_7\\
&= x_4x_5x_6 = -x_1x_4x_5x_7 = x_2x_4x_6x_7 = x_3x_5x_6x_7 = -x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7.
\end{aligned}
$$

Если пренебречь эффектами взаимодействия второго и более порядков, то получим восемь оценок, для которых

$$
\begin{array}{ll}
E\hat{b}''_0 = b_0, & E\hat{b}''_4 = b_4 - b_{12} + b_{56} + b_{37},\\
E\hat{b}''_1 = -b_1 + b_{24} + b_{35} + b_{67}, & E\hat{b}''_5 = b_5 - b_{13} + b_{46} + b_{27},\\
E\hat{b}''_2 = b_2 - b_{14} + b_{36} + b_{57}, & E\hat{b}''_6 = b_6 + b_{23} + b_{45} - b_{17},\\
E\hat{b}''_3 = b_3 - b_{15} + b_{26} + b_{47}, & E\hat{b}''_7 = b_7 + b_{34} + b_{25} - b_{16}.
\end{array}
$$

Объединяя этот план с главным планом семейства, получим 16 оценок плана $2^7//16$ с генераторами, вычисляемыми по теореме 6.9.4: $x_2x_5x_7$, $x_3x_4x_7$, $x_2x_3x_6$. Эти оценки, следуя теореме 6.9.5, можно получить как полусуммы и полуразности соответствующих оценок для планов $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$:

$$
\begin{array}{ll}
\left(\widehat{b'} - \widehat{b''}\right)/2 & \left(\widehat{b'} + \widehat{b''}\right)/2\\
E\hat{b}_{00} = 0, & E\hat{b}_0 = b_0,\\
E\hat{b}_1 = b_1, & E\hat{b}_{24} = b_{24} + b_{35} + b_{67},\\
E\hat{b}_{14} = b_{14}, & E\hat{b}_2 = b_2 + b_{36} + b_{57},\\
E\hat{b}_{15} = b_{15}, & E\hat{b}_3 = b_3 + b_{26} + b_{47},\\
E\hat{b}_{12} = b_{12}, & E\hat{b}_4 = b_4 + b_{56} + b_{37},\\
E\hat{b}_{13} = b_{12}, & E\hat{b}_5 = b_5 + b_{46} + b_{37},\\
E\hat{b}_{17} = b_{17}, & E\hat{b}_6 = b_6 + b_{23} + b_{45},\\
E\hat{b}_{16} = b_{16}, & E\hat{b}_7 = b_7 + b_{34} + b_{25}.
\end{array}
$$

Таким образом, главный эффект фиксированного фактора и все двухфакторные взаимодействия этого фактора с остальными факторами будут оценены несмещенно. Очевидно, что, выбирая любой геометрический план мощности 2 или выше, можно так подобрать другой план этого же семейства, что нужный главный эффект некоторого фактора и все двухфакторные взаимодействия этого фактора будут оценены без смещений другими главными эффектами и двухфакторными эффектами взаимодействия (в предположении, что эффекты взаимодействия более высоких порядков равны нулю).

Пример 6.9.4. Представим здесь технику Бокса и Хантера (G.E.P.Box, J.S.Hunter) [15] объединения геометрических планов одного семейства для построения плана мощности 3. Для плана (6.9.19) с генераторами (6.9.18) введем восьмую переменную x_8, столбец для которой в матрице плана будет содержать только +1. Тогда генерирующие соотношения вновь полученного плана запишутся в виде

$$1 = x_8,\ 1 = x_1x_2x_4,\ 1 = x_1x_3x_5,\ 1 = x_2x_3x_6,\ 1 = x_1x_2x_3x_7. \qquad (6.9.21)$$

Рассмотрим этот план (план $\boldsymbol{D}_1$) в качестве главного плана семейства. Теперь рассмотрим план $\boldsymbol{D}_2$, матрица плана которого имеет противоположные (по сравнению с матрицей плана $\boldsymbol{D}_1$) знаки. Очевидно, $\boldsymbol{D}_2$ – геометрический план и его генерирующие соотношения будут следующими:

$$1 = -x_8,\ 1 = -x_1x_2x_4,\ 1 = -x_1x_3x_5,\ 1 = -x_2x_3x_6,\ 1 = x_1x_2x_3x_7.$$

Составим объединение полученных двух геометрических планов одного семейства. В соответствии с теоремой 6.9.4 генерирующими соотношениями объединения будут

$$1 = x_1x_2x_4x_8,\ 1 = x_1x_3x_5x_8,\ 1 = x_2x_3x_6x_8,\ 1 = x_1x_2x_3x_7.$$

Легко получить определяющее соотношение объединения:

$$\begin{aligned}1 &= x_1x_2x_4x_8 = x_1x_3x_5x_8 = x_2x_3x_6x_8 = x_1x_2x_3x_7\\ &= x_2x_3x_4x_5 = x_1x_3x_4x_6 = x_3x_4x_7x_8 = x_1x_2x_5x_6\\ &= x_2x_5x_7x_8 = x_1x_6x_7x_8 = x_4x_5x_6x_8 = x_2x_4x_6x_7\\ &= x_1x_4x_5x_7 = x_5x_3x_6x_7 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8.\end{aligned}$$

Таким образом, объединение – геометрический план мощности 3. Оценки всех главных эффектов будут несмещенными (при условии, что все трех- и более факторные взаимодействия равны нулю). Сам план записан в табл. 8.

Таблица 8
Геометрический план $2^8//16$ мощности 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
–	–	–	+	+	+	–	+
+	–	–	–	–	+	+	+
–	+	–	–	+	–	+	+
+	+	–	+	–	–	–	+
–	–	+	+	–	–	+	+
+	–	+	–	+	–	–	+
–	+	+	–	–	+	–	+
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	–	–	–	+	–
–	+	+	+	+	–	–	–
+	–	+	+	–	+	–	–
–	–	+	–	+	+	+	–
+	+	–	–	+	+	–	–
–	+	–	+	–	+	+	–
+	–	–	+	+	–	+	–
–	–	–	–	–	–	–	–

Построенный геометрический план мощности 3 в 16 опытах позволяет произвести 16 несмещенных оценок сумм смешанных эффектов. Математические ожидания этих оценок без учета трех- и более факторных эффектов взаимодействия показаны ниже.

$$
\begin{aligned}
&E\hat{b}_0 = b_0, && E\hat{b}_8 = b_8,\\
&E\hat{b}_1 = b_1, && E\hat{b}_{12} = b_{12} + b_{37} + b_{48} + b_{56},\\
&E\hat{b}_2 = b_2, && E\hat{b}_{13} = b_{13} + b_{27} + b_{58} + b_{46},\\
&E\hat{b}_3 = b_3, && E\hat{b}_{14} = b_{14} + b_{28} + b_{36} + b_{57},\\
&E\hat{b}_4 = b_4, && E\hat{b}_{15} = b_{15} + b_{38} + b_{26} + b_{47},\\
&E\hat{b}_5 = b_5, && E\hat{b}_{16} = b_{16} + b_{78} + b_{34} + b_{25},\\
&E\hat{b}_6 = b_6, && E\hat{b}_{17} = b_{17} + b_{23} + b_{68} + b_{45},\\
&E\hat{b}_7 = b_7, && E\hat{b}_{18} = b_{18} + b_{24} + b_{35} + b_{67}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что подобная процедура может быть применена к любому геометрическому плану $(2^m//2^{m-l})$ мощности 2. В результате может быть получен план $2^{m+1}//2^{m-l+1}$ мощности 3.

Пусть $\mathbf{D}_l$ – геометрический план $2^m//2^{m-l}$ с генераторами $R_1, \dots, R_l$, причем n первых генераторов $(0 \le n \le l)$ не содержат переменную x_r. Пусть $\mathbf{D}_{l-1}$ – план $2^{m-1}//2^{m-l}$, получающийся вычеркиванием столбца x_r в плане $\mathbf{D}_l$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6.9.6. $\mathbf{D}_{l-1}$ есть геометрический план с генераторами

$$R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}R_{n+2}, \dots, R_{n+1}R_l . \tag{6.9.22}$$

Доказательство. Для плана $\mathbf{D}_{l-1}$, очевидно, выполняются соотношения

$$1 = R_1, 1 = R_2, \dots, 1 = R_n, 1 = R_{n+1}R_{n+2}, \dots, 1 = R_{n+1}R_l,$$

так как эти соотношения справедливы для плана $\mathbf{D}_l$, и взаимодействия (6.9.22) не содержат x_r . По лемме 6.9.1 взаимодействия (6.9.22) независимы. Их число равно $l-1$, поэтому они являются генераторами. Таким образом, теорема доказана.

Пример 6.9.5. Рассмотрим план (6.9.19) с генераторами (6.9.18). После вычеркивания, например, столбца x_3 образуем новый набор генераторов плана (6.9.19):

$$x_1x_2x_4,\ x_1x_3x_5,\ x_1x_2x_5x_6,\ x_2x_5x_7. \qquad (6.9.23)$$

Третий генератор (6.9.23) есть произведение второго и третьего генераторов (6.9.18), четвертый – произведение второго и четвертого генераторов (6.9.18). Таким образом, генераторы плана для шести переменных x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 и x_7 есть

$$x_1x_2x_4,\ x_1x_2x_5x_6,\ x_2x_5x_7.$$

Вычеркивая теперь, например, столбец x_7 плана (6.9.19), получим план для пяти переменных x_1, x_2, x_4, x_5 и x_6

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\left\|\begin{array}{ccccc} - & - & + & + & + \\ + & - & - & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & + & + & - & - \\ - & - & + & - & - \\ + & - & - & + & - \\ - & + & - & - & + \\ + & + & + & + & + \end{array}\right\|$$

с генераторами $x_1x_2x_4,\ x_1x_2x_5x_6$.

Далее мы приведем еще несколько теорем для двухфакторных геометрических планов из работы [16] Л.И.Бродского и В.З.Бродского. Теоремы будут сопровождаться примерами, взятыми также из работы [16]. Частично эти теоремы являются следствиями результатов, изложенных выше для общего случая геометрических факторных планов на s уровнях. В работе [16], однако, можно найти прямые доказательства этих теорем для случая $s = 2$, некоторые из которых будут здесь воспроизводиться.

Теорема 6.9.7. Необходимое и достаточное условие того, что 2^{m-l} точек, удовлетворяющих системе (6.3.1), содержат любую комбинацию уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_t}$ и притом равное число раз, состоит в том, что любая нетривиальная линейная комбинация уравнений (6.3.1) содержит хотя бы один ненулевой коэффициент на местах, отличных от $i_1, \dots, i_t$.

Доказательство теоремы 6.9.7 почти дословно повторяет доказательство теоремы 6.3.1.

Из теоремы 6.9.7 следует, что множество факторов F_{i_1}, …, F_{i_t} содержит все комбинации уровней и притом равное число раз тогда и только тогда, когда ни один определяющий пучок не имеет в качестве нулевых координат одновременно все координаты на местах, отличных от $i_1, \dots, i_t$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6.9.8. План **D**, задаваемый генерирующими соотношениями (6.9.2), тогда и только тогда содержит все комбинации уровней факторов F_{i_1}, …, F_{i_t} с одинаковой частотой, когда $x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_t}^{a_t}$ не является определяющим взаимодействием при любых значениях $a_1, \dots, a_t = 0$ или 1.

Пример 6.9. 6. Рассмотрим план $2^4//4$ (план **D**), задаваемый следующими генерирующими соотношениями:

$$1 = x_1x_2x_3,\ 1 = x_2x_3.$$

Определяющее соотношение тогда будет иметь следующий вид:

$$1 = x_1x_2x_3 = x_2x_3 = x_1.$$

По теореме 6.9.8 рассматриваемый план **D** содержит, например, все комбинации уровней факторов F_2 и F_4 с равной частотой, так как взаимодействия x_2, x_4, x_2x_4 не являются определяющими. В то же время множество факторов F_2 и F_3 не является полным в плане **D**, так как взаимодействие x_2x_3 – определяющее. Не является также полным множество факторов F_1 и F_3 и множество F_1, так как взаимодействие x_1 – определяющее.

Частным случаем теоремы 6.9.8 (а также простой переформулировкой теоремы 6.3.1) является следующий результат C.R.Rao [2].

Теорема 6.9.9 [2]**.** План **D**, задаваемый генерирующими соотношениями (6.9.2), тогда и только тогда образует гиперкуб мощности *t*, когда все определяющие взаимодействия являются более чем *t*-буквенными.

Пример 6.9.7. План $2^6//8$ с генераторами $x_1x_2x_3x_4$, $x_2x_3x_5x_6$ и $x_3x_4x_6$ является по теореме 6.9.7 гиперкубом мощности 2. Действительно, все определяющие взаимодействия ($x_1x_2x_3x_4$, $x_2x_3x_5x_6$, $x_3x_4x_6$, $x_1x_4x_5x_6$, $x_1x_2x_6$, $x_2x_4x_5$ и $x_1x_3x_5$) – более чем двухбуквенные.

Следующая теорема является следствием теоремы 6.4.1 для двухфакторных планов.

Теорема 6.9.10. Для плана **D**, задаваемого l генерирующими соотношениями (6.9.2), все $2^m - 1$ эффектов плана $\mathbf{D}^f$ делятся на 2^k связанных множеств ($k = m - l$). В одном из них (определяющем) содержится $2^{m-k} - 1$ эффектов, в остальных $2^k - 1$ множествах содержится по 2^{m-k} эффектов. Эффекты из различных связанных множеств порождают ортогональные эффекты в плане **D**. Эффекты одного связанного множества порождают совпадающие эффекты в плане **D.**

Природа эффектов, входящих в связанные множества, определяется следующей теоремой, являющейся следствием теоремы 6.4.2.

Теорема 6.9.11. Если $x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_t}^{a_t}$ не является определяющим взаимодействием плана **D** при любых значениях $a_1, \dots, a_t$ = 0 или 1, то все главные эффекты и эффекты взаимодействия факторов F_{i_1}, …, F_{i_t} в плане $\mathbf{D}^f$ порождают главные эффекты и эффекты взаимодействия тех же факторов в плане **D**.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_{m-k}$ – генераторы плана **D**. Тогда определяющее соотношение плана **D** есть

$$1 = R_1 = R_2 = R_1 R_2 = \cdots = R_1 R_2 \dots R_{m-k}. \qquad (6.9.24)$$

Пусть S – некое взаимодействие. Тогда из равенства (6.9.24) следует, что

$$S = SR_1 = SR_2 = SR_1 R_2 = \cdots = SR_1 R_2 \dots R_{m-k}. \qquad (6.9.25)$$

Все взаимодействия в равенстве (6.9.25) различны, и число их равно 2^{m-k} (с учетом, может быть, члена 1). Отсюда заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.9.12. Связанное множество, включающее взаимодействие S, может быть представлено в виде (6.9.25). Если ни одно из взаимодействий (6.9.25) не равно 1, то эти взаимодействия и только они составляют связанное множество, включающее S. Если одно из взаимодействий равенства (6.9.25) равно 1, то остальные $2^{m-k} - 1$ взаимодействий и только они составляют связанное определяющее множество (включающее S).

Теорема 6.9.13. Пусть в плане **D** связанные пары взаимодействий есть

$$P_{i_1}, P'_{i_1}, \dots, P_{i_r}, P'_{i_r}.$$

Тогда $P'_{i_1 \dots i_r} = P'_{i_1} \dots P'_{i_r}$ связано с $P_{i_1 \dots i_r} = P_{i_1} \dots P_{i_r}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$P_{i_1} = P'_{i_1} P^o_{i_1}, \dots, P_{i_r} = P'_{i_r} P^o_{i_r},$$

где $P^o_{i_k}$ – определяющие взаимодействия плана $\mathbf{D}'$ $(k = 1, \dots, r)$.
Поэтому

$$P_{i_1 \dots i_r} = P'_{i_1 \dots i_r} P^o,$$

где P^o, по определению, есть также определяющее взаимодействие, что и требовалось.

Теорема 6.9.14. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_{2^{m-k}}$ – все взаимодействия одного связанного множества. Тогда $P_1 P_2, \dots, P_1 P_{2^{m-k}}$ и только они образуют $2^{m-k} - 1$ определяющих взаимодействий.

Доказательство теоремы немедленно следует из того, что связанное множество взаимодействий $P_1, P_2, \dots, P_{2^{m-k}}$ по теореме 6.9.12 представимо в виде P_1, P_1R_1, P_1R_2, $P_1R_1R_2$, …, $P_1R_1 \dots R_{m-k}$.

Пример 6.9.8. Рассмотрим опять план $2^4//4$ из примера 6.9.6. Все 15 эффектов в полном плане 2^4 делятся на 4 связанных множества. Определяющее связанное множество состоит их трех определяющих взаимодействий x_1, x_2x_3, $x_1x_2x_3$. Связанное множество, содержащее, например, x_2, получается умножением определяющих взаимодействий на x_2. Оно состоит из взаимодействий x_2, x_1x_2, x_3 и x_1x_3. Значения, которые принимают 15 взаимодействий в плане $2^4//4$, показаны ниже в табл. 9 (они сгруппированы по связанным множествам).

Таблица 9
Связанные множества плана $\boldsymbol{2^4//4}$

x_1 x_2x_3 $x_1x_2x_3$	$\boldsymbol{x_2}$ x_1x_2 $\boldsymbol{x_3}$ x_1x_3	$\boldsymbol{x_4}$ x_1x_4 $x_2x_3x_4$ $x_1x_2x_3x_4$	$\boldsymbol{x_2x_4}$ $x_1x_2x_4$ $\boldsymbol{x_3x_4}$ $x_1x_3x_4$
+	–	+	–
+	+	–	–
+	–	–	+
+	+	+	+

Полужирным обозначены те взаимодействия, которые отвечают главным эффектам и эффектам взаимодействия в плане $2^4//4$. Так, контраст, отвечающий второму связанному множеству, не является эффектом взаимодействия факторов F_1 и F_3, поскольку взаимодействие x_1 – определяющее. В то же время этот контраст является главным эффектом фактора F_2 и главным эффектом фактора F_3 (x_2 и x_3 не являются определяющими взаимодействиями).

По теореме 6.9.14 любое связанное множество взаимодействий дает возможность построить все определяющие взаимодействия. Используя, например, четвертое связанное множество, получим определяющие взаимодействия

$$(x_2x_4)\,(x_1x_2x_4) = x_1,$$
$$(x_2x_4)\,(x_3x_4) = x_2x_3,$$
$$(x_2x_4)\,(x_1x_3x_4) = x_1x_2x_3.$$

Если рассматриваемая модель (часть модели (6.9.1)) содержит такие взаимодействия, что хотя бы два из них находятся в одном связанном множестве плана **D**, то матрица коэффициентов **X** плана для этой модели будет иметь, очевидно, совпадающие столбцы. Поэтому информационная матрица $\mathbf{X'X}$ будет вырождена, и решение нормальных уравнения метода наименьших квадратов (м.н.к.) по оцениванию параметров рассматриваемой модели не будет единственным. Если же модель содержит взаимодействия не более чем по одному от каждого связанного множества, то решение нормальных уравнений м.н.к. будет единственным.

В частном случае модели главных эффектов, включающей только однобуквенные взаимодействия, единственные м.н.к.-оценки существуют тогда и только тогда, когда для плана **D** не существует связанного множества, содержащего более одного однобуквенного взаимодействия. Последнее условие, в свою очередь, эквивалентно (как это следует из теоремы 6.9.9) тому, что план **D** есть гиперкуб мощности 2.

Случай, когда рассматриваемая модель содержит кроме всех однобуквенных взаимодействий $x_1, \dots, x_m$ некоторые взаимодействия $S_1, \dots, S_l$, может быть сведен к рассмотренному случаю модели главных эффектов следующим образом. Вместо невырожденного плана **D** для модели

$$Ey = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + b_{m+1} S_1 + \dots + b_{m+l} S_l \tag{6.9.26}$$

путем введения дополнительных факторов $x_{m+1}, \dots, x_{m+l}$ рассмотрим невырожденный геометрический план $\mathbf{D}'$ главных эффектов для модели

$$Ey = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + b_{m+1} x_{\mathrm{m+1}} + \dots + b_{m+l} x_{m+l}. \tag{6.9.27}$$

Пусть для плана $\mathbf{D}'$ выполняется следующее условие: среди его генераторов есть генераторы $x_{m+1} S_1, \dots, x_{m+l} S_l$. Тогда x_{m+i} и S_i находятся в одном связанном множестве для любого $i = 1, \dots, l$. Но взаимодействия $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+l}$ находятся в различных связанных множествах, так как **D** – невырожденный план главных эффектов. Поэтому и взаимодействия $x_1, \dots, x_m, S_1, \dots, S_l$ находятся в различных связанных множествах. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.9.15. Если существует невырожденный геометрический план главных эффектов в N опытах для модели (6.9.27) и среди генераторов этого плана есть генераторы $x_{m+1} S_1, \dots, x_{m+l} S_l$, то существует невырожденный геометрический план в N опытах для модели (6.9.26).

Теорема 6.9.16. Найдутся такие $i_1, \dots, i_{m-k}$ и неопределяющие взаимодействия $P_1, \dots, P_{2^k-1}$ (причем единственные для данных $i_1, \dots, i_{m-k}$), по одному из каждого связанного множества плана, задаваемого уравнениями (6.9.2), что ни одно из взаимодействий $P_1, \dots, P_{2^k-1}$ не содержит ни одной из букв $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$.

Доказательство. Очевидно, что найдутся такие $i_1, \dots, i_{m-k}$, что при помощи элементарных преобразований множество генераторов плана (6.9.2) может быть приведено к множеству генераторов $R_1, \dots, R_{m-k}$ со свойством: генератор R_j содержит x_{i_j} и не содержит x_{i_u} $(j = 1, \dots, m - k, u \neq j)$.

Рассмотрим теперь произвольное взаимодействие S некоторого связанного множества $\mathcal{L}_S$. Пусть S содержит x_{i_j} $(j = l_1, \dots, l_p;\ l_1, \dots, l_p = i_1, \dots, i_{m-k})$ и не содержит x_{i_u} $(u \neq l_1, \dots, l_p)$. Тогда, по теореме 6.9.12 $SR_{l_1} \dots R_{l_p} \in \mathcal{L}_S$ и обладает свойством, задаваемым теоремой 6.9.14.

Для доказательства единственности взаимодействия $SR_{l_1} \dots R_{l_p}$ предположим, что для данных $i_1, i_2, \dots, i_{m-k}$ существует два взаимодействия P_1 и P_2 с указанными свойствами. По теореме 6.9.14 их произведение $P_1 P_2$ есть определяющее взаимодействие (не содержащее $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$). С другой стороны, определяющее взаимодействие должно содержать какие-то из $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$, как произведение некоторых генераторов. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Теорема 6.9.17. В плане **D**, задаваемом l генерирующими соотношениями (6.9.2), существуют $k = m - l$ факторов (столбцов), образующих полный план $\mathbf{D}^f$. Элементы любого из оставшихся столбцов $\boldsymbol{\xi}$ являются произведениями соответствующих элементов некоторых столбцов из $\mathbf{D}^f$ (фиксированных для данного $\boldsymbol{\xi}$).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6.9.16, найдем такие $i_1, \dots, i_{m-k}$ и генераторы $R_1, \dots, R_{m-k}$ плана, чтобы генератор R_j содержал x_{i_j} и не содержал $x_{i_u} (j = 1, \dots, m-k; u \neq j)$. Тогда очевидно, что любое определяющее взаимодействие содержит хотя бы одну из букв x_{i_j} $(j = 1, \dots, m-k)$, или (что то же самое) взаимодействие, не содержащее ни одной из букв x_{i_j} $(j = 1, \dots, m-k)$, не является определяющим. То есть, взаимодействие $x_{j_1}^{a_1} \dots x_{j_k}^{a_k}$ $(j_1, \dots, j_k \neq i_1, \dots, i_{m-k})$ не является определяющим ни при каких значениях $a_1, \dots, a_k = 0$ или 1. По теореме 6.9.8 план **D** содержит все комбинации уровней факторов $F_{j_1}, \dots, F_{j_k}$ $(j_1, \dots, j_k \neq i_1, \dots, i_{m-k})$. Эти факторы, очевидно, составляют полный план. Элементы столбцов, образованные значениями $x_{i_j} (j = 1, \dots, m-k)$ получаются из генерирующих соотношений $1 = R_{i_1}, \dots, 1 = R_{i_{m-k}}$ по формулам:

$$x_{i_1} = R_{i_1} x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}} = R_{i_{m-k}} x_{i_{m-k}},$$

где генераторы $R_{i_1}, \dots, R_{i_{m-k}}$ не содержат $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$.

Пример 6.9.9. Генераторы плана $2^6//8$ из примера 6.9.7 элементарными преобразованиями приводятся к следующему виду:

$$R_1 = x_1 x_2 x_3 x_4,\ R_2 = x_1 x_3 x_5,\ R_3 = x_1 x_2 x_6.$$

Генератор R_j содержит x_{i_j} и не содержит x_{i_u} $(j = 1, 2, 3;\ i_1 = 4, i_2 = 5, i_3 = 6; u \neq j)$. Поэтому любое связанное множество $\mathcal{L}_S$, содержащее неопределяющее взаимодействие S, содержит также взаимодействие без букв x_4, x_5 и x_6. Для $S = x_1x_3x_5x_6$, например, таким взаимодействием будет $SR_2R_3 = x_1x_2$. По теореме 6.9.17 в рассматриваемом плане факторы F_1, F_2 и F_3 образуют полный план $\mathbf{D}^f$. Столбцы плана для факторов F_4, F_5 и F_6 строятся, как поэлементные произведения столбцов плана $\mathbf{D}^f$ на основании равенств:

$$1 = R_1,\ 1 = R_2,\ 1 = R_3,$$

или

$$x_4 = x_1x_2x_3,\ x_5 = x_1x_3,\ x_6 = x_1x_2.$$

Теорема 6.9.18. Существуют такие представители всех неопределяющих связанных множеств (по одному от каждого множества), произведение которых равно либо 1, либо любому заданному определяющему взаимодействию.

Доказательство. Согласно теореме 6.9.16 найдутся такие $i_1, \dots, i_k$, для которых существуют неопределяющие взаимодействия $P_1, \dots, P_{2^k-1}$(по одному от каждого связанного множества), содержащие только буквы $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. Число неопределяющих связанных множеств равно $2^k - 1$. Число различных взаимодействий, содержащих только $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, также равно $2^k - 1$. Поэтому выбранные неопределяющие взаимодействия $P_1, \dots, P_{2^k-1}$ включают все различные взаимодействия, содержащие только $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$. Очевидно, что число таких взаимодействий, содержащих заданную букву x_i $(i = i_1, \dots, i_k)$, равно $2^{k} - 1$. Таким образом, произведение выбранных неопределяющих взаимодействий равно 1.

Для того чтобы это произведение было равно заданному взаимодействию P_0, достаточно, например, заменить взаимодействие P_1 на взаимодействие P_1P_0 (взаимодействие P_1P_0 находится в одном связанном множестве с взаимодействием P_1).

Таким образом, теорема доказана.

Следующая теорема является простым следствием теоремы 6.9.18.

Теорема 6.9.19. Существуют такие представители всех связанных множеств (по одному от каждого множества), произведение которых равно либо 1, либо любому заданному определяющему взаимодействию.

Теорема 6.9.20. Произведение взаимодействий $P_1, \dots, P_{2^k}$ из различных связанных множеств равно либо 1, либо определяющему взаимодействию.

Доказательство. По теореме 6.9.18 можно выбрать различных представителей $P_1', \dots, P_{2^k}'$ связанных множеств так, что $P_1' \dots P_{2^k}' = 1$. Однако для любого представителя P_i i-го связанного множества $P_i = P_i'P_{i_0}$, где P_{i_0} – определяющее взаимодействие. Таким образом, $P_1 \dots P_{2^k} = P_1' \dots P_{2^k}'P_{1_0} \dots P_{2^k{}_0} = P_{1_0} \dots P_{2^k{}_0}$,что и требовалось.

Литература

1. Bose, R.C. (1947). Mathematical theory of the symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **8**, 107–166.

2. Rao, C.R. (1950). The theory of fractional replication in factorial experiments. *Sankhyā*, **10**, 81–86.

3. Bose, R.C. and Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 508–524.

4. Бродский В.З. (1972). *Многофакторные регулярные планы*. Изд-во МГУ.

5. Fisher, R.A. (1945).A system of confounding for factors with more than two alternatives giving completely orthogonal cubes and higher powers. *Ann. Eugenics*, **12**, 283–290.

6. Fisher, R.A. (1942). The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of group. *Ann. Eugenics*, **11**, 341–353.

7. Rao, C.R, (1947). Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.*, **9**, 128–139.

8. Gulati, B.R. and Kounias, E.G. (1970). On bounds useful in the theory of symmetrical factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **32**, 123–133.

9. Qvist, B. (1952). Some remarks concerning curves of second degree in finite plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A, **1**, 1–27.

10. Tallini, G. (1956). Sulla k-calotta i uno spazio lineare finito. *Ann. Math.*, **42**, 119–164.

11. Barlotti, A. (1957). Una limitazione superiore per il numeroi di punti appartenenti a una calotta b (k, o) di uno spazio lineare finito. *Boll. Unione Math. Ital.*, **12**, 67–70.

12. Bose, R.C., and Srivastava, J.N. (1964). On a bound useful in the theory of factorial designs and error correcting codes. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 408–414.

13. Rao, C.R. (1946). On hypercubes of strength "d" leading to confounded design in factorial experiments. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **38**, 67–78.

14. Addelman, S. (1962). Symmetrical and asymmetrical fractional factorial plans. *Technometrics*, **4**, 47–58.

15. Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (1961). The 2к-p fractional factorial designs, Part 1. *Technometrics*, **3**, 311-351; Part 2. *Technometrics*, **3**, 449–458.

16. Бродский Л.И., Бродский В.З. (1977). Свойства геометрических планов 2^k. В сб. «Регрессионные эксперименты (планирование и анализ)» (В.В.Налимов – ред.). Изд-во МГУ, 85-102.

Глава 7. Построение ортогональных таблиц

§ 1. Ортогональные таблицы мощности t

Далее будем изучать способы построения ортогональных таблиц, не являющихся геометрическими, и начнем с результатов Буша (K.A.Bush), ведущих к построению ортогональных таблиц индекса 1.

Ортогональные таблицы индекса 1

Теорема 7.1.1 [1]. Если $s = p^h$, где p простое и $s > t$, то можно построить ортогональную таблицу $(s^t,\ s+1,\ s,\ t)$**.**

Доказательство. Элементы поля Галуа $GF(s)$ обозначим через 0, 1, …, $s-1$. Рассмотрим множество из s^t полиномов

$$Y_i(x) = a_{t-1}^{(i)} x^{t-1} + a_{t-2}^{(i)} x^{t-2} + \cdots + a_1^{(i)} x + a_0^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s^t),$$

где матрица

$$\left\| \begin{matrix} a_{t-1}^{(1)} & a_{t-2}^{(1)} & \dots & a_0^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t-1}^{(s^t)} & a_{t-2}^{(s^t)} & \dots & a_0^{(s^t)} \end{matrix} \right\|$$

образует полный план $\boldsymbol{D}^f$ с элементами из $GF(s)$.

Образуем теперь таблицу $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ размера $(s^t \times s)$ с элементами $c_{ij} = Y_i(j)$. Покажем, что полученная матрица $\mathbf{C}$ – ортогональная таблица мощности *t* индекса 1.

Предположим, что можно выбрать *t* столбцов, которые дадут в строках i и i' одинаковые комбинации чисел. Пусть этим *t* столбцам соответствуют элементы $i_1, \dots, i_t$ из $GF(s)$, i-м и i'-м строкам соответствуют полиномы

$$\begin{aligned} Y_i(x) &= a_{t-1}^{(i)} x^{t-1} + a_{t-2}^{(i)} x^{t-2} + \cdots + a_1^{(i)} x + a_0^{(i)}, \\ Y_{i'}(x) &= a_{t-1}^{(i')} x^{t-1} + a_{t-2}^{(i')} x^{t-2} + \cdots + a_1^{(i')} x + a_0^{(i')} \end{aligned} \qquad (7.1.1)$$

соответственно. Подставим элемент i_1 в оба уравнения (7.1.1) и вычтем одно из другого. То же самое проделаем со всеми элементами $i_1, \dots, i_t$. Тогда получим следующую однородную систему из t уравнений относительно $A_l = a_l^i - a_l^{i'}$ $(i = 0,1,\dots,t-1)$:

$$\begin{aligned} &A_{t-1}i_1^{t-1} + A_{t-2}i_1^{t-2} + \cdots + A_1 i_1 + A_0 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{t-1}i_t^{t-1} + A_{t-2}i_t^{t-2} + \cdots + A_1 i_t + A_0 = 0. \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Так как полиномы $Y_i(x)$ и $Y_{i'}(x)$ различны, все A_l одновременно не могут быть равны нулю. Для существования нетривиального решения системы (7.1.2) определитель матрицы коэффициентов этой системы

$$\begin{Vmatrix} i_1^{t-1} & i_1^{t-2} & \cdots & i_1 & 1 \\ i_2^{t-1} & i_2^{t-2} & \cdots & i_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i_t^{t-1} & i_t^{t-2} & \cdots & i_t & 1 \end{Vmatrix}$$

должен быть равен нулю. Однако этот определитель есть определитель Вандермонда, значение которого

$$\prod_{u<v}(i_u - i_v)$$

не может быть равно нулю вследствие того, что все $i_1,\dots,i_t$ различны. Полученное противоречие доказывает, что матрица **C** не содержит t таких столбцов, которые дают в двух различных строках одинаковые комбинации. Таким образом, матрица **C** есть ортогональная таблица $(s^t,\ s,\ s,\ t)$.

К матрице **C** можно добавить еще один столбец из элементов $a_{t-1}^{(i)}$. В этом случае $A_{t-1} = 0$ и получаем систему из $t-1$ уравнений с $t-1$ неизвестными. Чтобы существовало нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель Вандермонда порядка $t-2$ был равен нулю, что невозможно. Поэтому полученная матрица $\mathbf{C}_1$ есть ортогональная таблица $(s^t,\ s+1,\ s,\ t)$ мощности t и индекса 1.

Обозначим через $f(N,\ s,\ t)$ максимальное число факторов, которое может входить в ортогональную таблицу $(N,\ m,\ s,\ t)$. Тогда с учетом теоремы 7.1.1 и неравенств (5.2.10) и (5.2.11) получим следующую теорему.

Теорема 7.1.2 [1].

$$s+1 \le f(s^t, s, t) \le s+t-1, \text{ если } s = 2^h > t, \tag{7.1.3}$$
$$s+1 \le f(s^t, s, t) \le s+t-2, \text{ если } s = p^h > t, \tag{7.1.4}$$

где p простое нечетное.

Теорема 7.1.3 [1]. Если $s = p^h$, где p простое и $s \le t$, то можно построить ортогональную таблицу $(s^t,\ t+1,\ s,\ t)$.

Доказательство. Образуем матрицу размера $[s^t \times (t+1)]$:

$$\left\|\begin{matrix} a_{t-1}^{(1)} & a_{t-2}^{(1)} & \cdots & a_1^{(1)} & a_0^{(1)} & Y_1(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t-1}^{(s^t)} & a_{t-2}^{(s^t)} & \cdots & a_1^{(s^t)} & a_0^{(s^t)} & Y_{s^t}(t) \end{matrix}\right\|.$$

Эта матрица, как легко показать, есть ортогональная таблица мощности t индекса 1. Из этого результата с учетом неравенства (5.2.12) следует

Теорема 7.1.4 [1].

$f(s^t, s, t) = t + 1$, если $s \leq t$, $s = p^h$ (p простое).

Достроение ортогональных таблиц

Пусть S – упорядоченное множество из s элементов, которые обозначим через $0,1, \dots, s-1$. Для любого t рассмотрим s^t различных упорядоченных t-мерных вектор-строк из элементов множества S. Эти векторы могут быть разделены на s^{t-1} множеств, каждое из которых состоит из s t-мерных векторов, являющихся полным множеством циклических перестановок элементов S. Обозначим эти множества через S_i $(i = 1, \dots, s^{t-1})$.

Теорема 7.1.5 [2]. Пусть существует матрица из r столбцов с элементами из S

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{matrix}\right\| \quad (n = \lambda s^{t-1}) \qquad (7.1.5)$$

такая, что в каждой подматрице размера $(n \times t)$ число строк, принадлежащих каждому S_i равно λ. Тогда можно построить ортогональную таблицу $(\lambda s^t,\ r,\ s,\ t)$. Если матрица (7.1.5) к тому же есть ортогональная таблица мощности $t-1$, то можно построить ортогональную таблицу $(\lambda s^t,\ r+1, s, t)$.

Доказательство. Множества S_i $(i = 1, \dots, s^{t-1})$ могут быть, в частности, определены следующим образом. Рассмотрим s^{t-1} различные $(t-1)$-мерные вектор-строки из элементов множества S. Пусть первые t-мерные вектор-строки каждого множества S_i есть $(j, i_1, \dots, i_{t-1})$, где $(i_1, \dots, i_{t-1})$ – одна из s^{t-1} различных $(t-1)$-мерных строк и j – фиксированный произвольный элемент множества S. Остальные $(s-1)$ строк каждого множества S_i образуются из первой циклической перестановки элементов множества S.

Построим теперь ортогональную таблицу $(\lambda s^t,\ r,\ s,\ t)$ следующим образом. Первые ее λs^{t-1} строк образуются из матрицы (7.1.5), удовлетворяющей условиям теоремы. К матрице (7.1.5) присоединяются еще $s-1$ матриц, образованных из (7.1.5) циклическими перестановками элементов множества S. Легко показать, что полученная матрица есть ортогональная таблица $(\lambda s^t,\ r,\ s,\ t)$.

Если матрица (7.1.5) образует ортогональную таблицу мощности $t-1$, то можно добавить к полученной таблице $(\lambda s^t,\ r,\ s,\ t)$ дополнительный столбец, в котором первые λs^{t-1} элементов равны 0, вторые λs^{t-1} элементов равны 1 и т.д. Таким образом, будет построена ортогональная таблица $(\lambda s^t,\ r+1,\ s,\ t)$**.**

Замечание к теореме 7.1.5. Очевидно, что если в построенной ортогональной таблице $(\lambda s^t,\ r+1,\ s,\ t)$ выбрать подматрицу, образованную первыми λs^{t-1} строками и первыми r столбцами, то получим ортогональную таблицу $(\lambda s^{t-1},\ r,\ s,\ t-1)$. Поэтому любая ортогональная таблица $(\lambda s^{t-1},\ r,\ s,\ t-1)$ мощности $t-1$ может быть получена вычеркиванием некоторых строк и столбца из некоторой ортогональной таблицы $(\lambda s^t,\ r+1,\ s,\ t)$ мощности t.

§ 2. Ортогональные таблицы мощности 2

Метод разностей

В этом разделе мы опишем метод разностей [3] Бозе и Буша (R.C. Bose, K.A. Bush) для построения ортогональных таблиц мощности 2.

Определение 7.2.1. Ортогональная таблица **D** вида $(\alpha\beta s^2,\ m,\ s,\ 2)$ называется β-разрешимой, если она представима в следующем виде:

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{\alpha s} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathbf{D}_i\ (i = 1, \dots, \alpha s)$ – ортогональные таблицы вида $(\beta s,\ m,\ s,\ 1)$. Полностью разрешимой называется 1-разрешимая таблица.

Если ортогональная таблица $(\alpha\beta s^2,\ m,\ s,\ 2)$ β-разрешима, то можно добавить еще один столбец с тем, чтобы получить ортогональную таблицу $(\alpha\beta s^2,\ m+1,\ s,\ 2)$. Этот последний столбец образуют элементы $0, 1, \dots, s-1 \in GF(s)$ так, чтобы $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_\alpha$ соответствовали числа 0; $\mathbf{D}_{\alpha+1}, \dots, \mathbf{D}_{2\alpha}$ соответствовали числа 1 и т. д.

Пусть M – аддитивная группа, состоящая из s элементов, обозначаемых через $0, 1, \dots, s-1$. Предположим, что матрица (разностная схема)

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\mathrm{r}} \end{matrix} \right\| \qquad (7.2.1)$$

удовлетворяет условиям $n = \lambda s,\ a_{ij} \in M$; среди разностей соответствующих элементов любых двух столбцов (7.2.1) каждый элемент группы M встречается точно λ раз.

Запишем таблицу сложения аддитивной группы M. Каждый элемент матрицы (7.2.1) заменим на соответствующий столбец таблицы сложения. Покажем, что полученный план **D** есть полностью разрешимая ортогональная таблица $(\lambda s^2,\ r,\ s,\ 2)$.

s^2 различных (1×2) векторов с координатами из M могут быть разделены на s классов; каждый класс будет соответствовать одному элементу группы M следующим образом: если $i - j = l\ (i,\ j,\ l \in M)$, то вектор $(i,\ j)$ принадлежит классу, соответствующему l. В таблице сложения M разности соответствующих элементов двух различных столбцов остаются постоянными. Поэтому векторы, образованные из i-го и j-го столбцов таблицы сложения группы M, находятся в классе, соответствующем l. Так как в матрице (7.2.1) среди разностей соответствующих элементов любых двух столбцов каждый элемент группы M встречается точно λ раз, то и в **D** каждый вектор встречается точно λ раз.

Поскольку полученная ортогональная таблица $(\lambda s^2,\ r,\ s,\ 2)$ полностью разрешима, можно добавить еще один столбец и получить ортогональную таблицу $(\lambda s^2,\ r+1,\ s,\ 2)$.

Пример 7.2.1. Иллюстрируем рассмотренный метод примером [3] построения таблицы (18, 7, 3, 2). Для M выберем поле Галуа $GF(3)$. Таким образом, таблица сложения для M имеет вид

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(7.2.2)

Разностная схема (7.2.1) построена подбором [3]:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (7.2.3)$$

Нетрудно проверить, что разности соответствующих элементов любых двух столбцов дают по два раза 0, 1 и 2. Для получения ортогональной таблицы (18, 6, 3, 2) заменим в матрице (7.2.3) каждый элемент на соответствующий столбец таблицы сложения (7.2.2). Например, заменим 1 в матрице (7.2.3) на столбец $(1, 2, 0)^T$. К полученной ортогональной таблице (18, 6, 3, 2) добавим еще один столбец из шести нулей, шести единиц и шести двоек. В результате получим план, записанный в табл. 10.

Таблица 10
Ортогональная таблица (18, 7, 3, 2)

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0
2	2	2	2	2	2	0
0	0	1	2	1	2	0
1	1	2	0	2	0	0
2	2	0	1	0	1	0
0	1	0	2	2	1	1
1	2	1	0	0	2	1
2	0	2	1	1	0	1
0	2	2	0	1	1	1
1	0	0	1	2	2	1
2	1	1	2	0	0	1
0	1	2	1	0	2	2
1	2	0	2	1	0	2
2	0	1	0	2	1	2
0	2	1	1	2	0	2
1	0	2	2	0	1	2
2	1	0	0	1	2	2

Используя приведенный метод построения ортогональных таблиц, можно получить следующий результат.

Теорема 7.2.1 [3]. Если $\lambda = p^u$ и $s = p^v$ (p простое), существует полностью разрешимая ортогональная таблица $(\lambda s^2,\ \lambda s,\ s,\ 2)$.

Доказательство. Рассмотрим поле Галуа $GF(p^h)$ $(h = u + v)$, элементы которого могут быть записаны как полиномы степени $h - 1$ с коэффициентами из поля Галуа $GF(p)$ классов вычетов по модулю p. Все элементы $GF(p^h)$ обозначим через $0, 1, \ldots, p^h - 1$, придерживаясь лексикографического порядка, который означает следующее. Обозначим элемент $GF(p^h)$

$$a_{h-1}\chi^{h-1} + \cdots + a_1\chi + a_0 \qquad (7.2.4)$$

через i, если вектор коэффициентов полинома (7.2.4) соответствует p-ичной записи числа i.

Рассмотрим теперь подмножество M элементов $GF(p^h)$, которое состоит из первых p^v элементов $GF(p^h)$, когда они записаны в лексикографическом порядке. Установим соответствие между элементами поля $GF(p^h)$ и элементами M следующим образом. Элементу i поля $GF(p^h)$ будет однозначно соответствовать элемент j из M, если $i \equiv j \pmod{p^v}$. Каждому элементу j из M будет соответствовать p^u элементов $GF(p^h)$.

Запишем таблицу умножения $GF(p^h)$ и заменим каждый ее элемент на соответствующий элемент из M. Полученная схема будет иметь размер $p^h \times p^h$. Если рассмотреть разности соответствующих элементов любых двух столбцов таблицы умножения, то каждый элемент $GF(p^h)$ будет встречаться точно один раз. Также если элементы i и i' поля $GF(p^h)$ соответствуют элементам j и j' из M, то элемент $i - i'$ поля $GF(p^h)$ соответствует элементу $j - j'$ из M. Следовательно, в полученной схеме каждый элемент из M встречается точно $\lambda = p^u$ раз среди разностей соответствующих элементов любых двух столбцов. Используя изложенный выше метод, каждый элемент полученной схемы заменим на соответствующий столбец таблицы сложения M. Полученный при этом план, таким образом, есть полностью разрешимая ортогональная таблица $(\lambda s^2,\ \lambda s,\ s,\ 2)$.

Пример 7.2.2. Пусть $p = 2,\ u = 1,\ v = 2$. Рассмотрим поле Галуа $GF(2^3)$, элементы которого получим, используя неприводимый полином $x^3 + x^2 + 1$:

$$
\begin{aligned}
&0 = P_0(x) \equiv 0, && 4 = P_4(x) \equiv x^2,\\
&1 = P_1(x) \equiv 1, && 5 = P_5(x) \equiv x^2 + 1,\\
&2 = P_2(x) \equiv x, && 6 = P_6(x) \equiv x^2 + x,\\
&3 = P_3(x) \equiv x + 1, && 7 = P_7(x) \equiv x^2 + x + 1.
\end{aligned}
$$

Соответствие между элементами $GF(2^3)$ и M задается следующим образом:

$$
\begin{array}{ccc}
GF(2^3) & & M \\
\left.\begin{array}{c} 0,4 \\ 1,5 \\ 2,6 \\ 3,7 \end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.
\end{array}
\tag{7.2.5}
$$

Таблица умножения $GF(2^3)$ имеет вид

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	5	7	1	3
3	0	3	6	5	1	2	7	4
4	0	4	5	1	7	3	2	6
5	0	5	7	2	3	6	4	1
6	0	6	1	7	2	4	3	5
7	0	7	3	4	6	1	5	2

Используя соответствие (7.2.5), получим разностную схему

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}. \qquad (7.2.6)$$

Для того чтобы получить полностью разрешимую ортогональную таблицу (32, 8, 4, 2), заменим все элементы (7.2.6) на соответствующие столбцы в таблице сложения M, которая имеет следующий вид:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

После добавления столбца, содержащего 8 нулей, 8 единиц, 8 двоек и 8 троек, получим ортогональную таблицу (32, 9, 4, 2).

Наконец, рассмотрим процедуру добавления новых столбцов к полностью разрешимой ортогональной таблице $(\lambda s^2,\ \lambda s,\ s,\ 2)$, где $\lambda = p^u$, $s = p^v$ (p простое).

Пусть $c = [u/v]$ (квадратные скобки, как и ранее, означают целую часть числа). Если $c = 0$, то следует остановиться после добавления одного столбца по методу, изложенному выше. Если же $c > 0$, то есть $u \geq v$, можно помимо полностью разрешимой ортогональной таблицы $(\lambda s^2,\ \lambda s,\ s,\ 2)$ точно таким же способом получить полностью разрешимую ортогональную таблицу $(\lambda_1 s^2,\ \lambda_1 s,\ s,\ 2)$, где $\lambda_1 = p^{u-v}$. Обозначим первую таблицу через $\mathbf{D}_0$, а вторую – через $\mathbf{D}_1$. Число строк в $\mathbf{D}_1$ равно числу таблиц мощности 1, составляющих $\mathbf{D}_0$, так как $\lambda_1 s^2 = \lambda s = p^{u+v}$.

Расширим $\mathbf{D}_1$, повторяя каждую ее строку по s раз. Обозначим полученную матрицу через $\mathbf{D'}_1$. $\mathbf{D'}_1$ имеет столько же строк, сколько и $\mathbf{D}_0$. В $\|\ \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D'}_1\ \|$ каждой компоненте $\mathbf{D}_0$ будут соответствовать одинаковые строки $\mathbf{D}_1$, повторенные s раз. Так как $\mathbf{D}_0$ – полностью разрешимая таблица, очевидно, что любая упорядоченная пара соответствующих элементов строк $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ встречается точно λ раз. Таким образом, $\|\ \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D'}_1\ \|$ есть ортогональная таблица $(\lambda s^2,\ \lambda s + \lambda_1 s,\ s,\ 2)$ мощности 2.

Так как $\mathbf{D}_1$ полностью разрешима, $\|\ \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D'}_1\ \|$ – s-разрешима. Если $c = 1$, или, что то же самое, $\lambda_1 < s$, то следует остановиться после добавления последнего столбца, состоящего из λs нулей, λs единиц и т. д. Таким образом, получим ортогональную таблицу $(\lambda s^2,\ \lambda s + \lambda_1 s + 1,\ s,\ 2)$.

Если $c > 1$, можно построить полностью разрешимую ортогональную таблицу $\mathbf{D}_2$, $(\lambda_2 s^2,\ \lambda_2 s,\ s,\ 2)$, где $\lambda_2 = p^{u-2v}$. Повторением каждой строки $\mathbf{D}_2$ по s^2 раз образуем матрицу $\mathbf{D}'_2$ и матрицу $\|\ \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}'_1 \quad \mathbf{D}'_2\ \|$. Так же, как и ранее, получим, что $\|\ \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}'_1 \quad \mathbf{D}'_2\ \|$ – ортогональная таблица мощности 2 для $\lambda s + \lambda_1 s + \lambda_2 s$ факторов.

Если $c = 2$, закончим процедуру добавлением последнего столбца, если $c > 2$, продолжим процедуру аналогичным образом.

В общем случае этот метод приводит к построению ортогональной таблицы $(\lambda s^2,\ \lambda s + \lambda_1 s + \cdots + \lambda_c s + 1,\ s,\ 2)$ мощности 2, где $\lambda_i = \lambda / s^i$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2.2 [3]. Пусть $\lambda = p^u$, $s = p^v$ (p простое). Тогда можно построить ортогональную таблицу $(\lambda s^2,\ m,\ s,\ 2)$, где

$$m = \frac{\lambda(s^{c+1} - 1)}{s^c - s^{c-1}} + 1 \quad \text{и} \quad c = [u/v].$$

Пример 7.2.3. Используем теорему 7.2.2 для построения ортогональной таблицы мощности 2 в 27 опытах для трехуровневых факторов. Применив результаты теоремы 7.2.1, можно построить полностью разрешимую ортогональную таблицу $\mathbf{D}_0$ (27, 9, 3, 2). В этом случае $u = v = 1$ и $c = 1$. Поэтому можно построить полностью разрешимую ортогональную таблицу $\mathbf{D}_1$, (9, 3, 3, 2). Повторяя каждую строку этой таблицы по три раза, получим 3-разрешимую ортогональную таблицу $\mathbf{D}'_1$ (27, 3, 3, 2). Присоединив к

$\| \mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}'_1 \|$ последний столбец из 9 нулей, 9 единиц и 9 двоек, получим план, записанный в табл. 11.

Таблица 11
Построение ортогональной таблицы (27, 13, 3, 2) методом разностей

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
0	1	0	1	2	2	0	2	1	2	1	1	0
1	2	1	2	0	0	1	0	2	2	1	1	0
2	0	2	0	1	1	2	1	0	2	1	1	0
0	0	1	2	2	0	2	1	1	1	2	2	0
1	1	2	0	0	1	0	2	2	1	2	2	0
2	2	0	1	1	2	1	0	0	1	2	2	0
0	1	2	2	0	2	1	1	0	1	1	0	1
1	2	0	0	1	0	2	2	1	1	1	0	1
2	0	1	1	2	1	0	0	2	1	1	0	1
0	2	2	0	2	1	1	0	1	0	2	1	1
1	0	0	1	0	2	2	1	2	0	2	1	1
2	1	1	2	1	0	0	2	0	0	2	1	1
0	2	0	2	1	1	0	1	2	2	0	2	1
1	0	1	0	2	2	1	2	0	2	0	2	1
2	1	2	1	0	0	2	0	1	2	0	2	1
0	0	2	1	1	0	1	2	2	2	2	0	2
1	1	0	2	2	1	2	0	0	2	2	0	2
2	2	1	0	0	2	0	1	1	2	2	0	2
0	2	1	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2
1	0	2	2	1	2	0	0	1	1	0	1	2
2	1	0	0	2	0	1	1	2	1	0	1	2
0	1	1	0	1	2	2	0	2	0	1	2	2
1	2	2	1	2	0	0	1	0	0	1	2	2
2	0	0	2	0	1	1	2	1	0	1	2	2

Метод Аддельмана – Кемпзорна

Теорема 7.2.3 [4]. Существует регулярный план мощности 2 для

$$\frac{2(s^n-1)}{(s-1)}-1$$

факторов, каждый из которых имеет $s = p^h$ уровней (p простое) в $2s^n$ опытах.

Доказательство этой теоремы весьма громоздко и использует семь лемм. Здесь укажем только способ построения указанных планов, причем для упрощения изложения ограничимся случаем $n = 2$.

Первую половину плана будем строить следующим образом. В первых двух столбцах, которые обозначим $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, расположим полный факторный план s^2. Остальные столбцы будут следующими:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_1 + (s-1)\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{v}_1^{(2)} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \dots,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + (s-1)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

где через $\mathbf{v}_1^{(2)}$ обозначен столбец, элементы которого есть квадраты соответствующих элементов столбца $\mathbf{v}_1$.

Вторую половину плана будут образовывать следующие столбцы:

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\zeta}_1,\ \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\zeta}_2, \dots, \mathbf{v}_1 + (s-1)\mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\zeta}_{s-1},$$
$$k_0\mathbf{v}_1^{(2)} + \mathbf{v}_2, k_0\mathbf{v}_1^{(2)} + k_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\tau}_1,\ k_0\mathbf{v}_1^{(2)} + k_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\tau}_2,\ \dots,$$
$$k_0\mathbf{v}_1^{(2)} + k_{s-1}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\tau}_{s-1},$$

где $\boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_{s-1}$ – s^2-мерные столбцы, состоящие из элементов $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ соответственно; столбцы $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{s-1}$ состоят из элементов $\tau_1, \dots, \tau_{s-1}$ соответственно. Если s нечетно, то выберем в качестве элемента k_0 квадратичный невычет в $GF(s)$. Обозначим через d_i i различных ненулевых элементов $GF(s)$ и положим

$$\zeta_i = \frac{k_0 - 1}{4k_0 d_i},\quad \mathrm{k}_i = k_0 d_i,\quad \tau_i = \frac{d_i^2(k_0-1)}{4}. \tag{7.2.7}$$

Если s четно, положим $k_0 = 1$ и выберем в качестве ζ_i любой из элементов $GF(s)$, который не представим в виде $a^2 - (1/d_i)a$, где a пробегает все значения в $GF(s)$. Положим также $k_i = d_i$ и в качестве τ_i; выберем любой из элементов $GF(s)$, не представимый в виде $a^2 + d_i a$ (a пробегает все значения в $GF(s)$).

Методом Аддельмана-Кемпзорна (S. Addelman, O. Kempthorne) могут быть построены следующие ортогональные таблицы: (18, 7, 3, 2), (32, 9, 4, 2), (50, 11, 5, 2), (128, 41, 4, 2), (250, 61, 5, 2), (54, 25, 3, 2), (98, 15, 7, 2), (128, 17, 8, 2), (162, 19, 9, 2). Только первые две таблицы могут быть построены также методом разностей, описанным в данном параграфе.

Пример 7.2.4 [4]**.** Иллюстрируем метод Аддельмана-Кемпзорна на примере построения таблицы (50, 11, 5, 2). Первая половина плана из 25 опытов содержит 11 столбцов, первые два из которых $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ образуют полный факторный план. Остальные столбцы есть

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{v}_1^{(2)} + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1^{(2)} + 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Вторая половина плана состоит также из 25 опытов и следующих 11 столбцов:

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\zeta}_1$, $\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\zeta}_2$, $\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\zeta}_3$, $\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\zeta}_4$, $k_0\mathbf{v}_1^{(2)}+\mathbf{v}_2$, $k_0\mathbf{v}_1^{(2)}+k_1\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\tau}_1$, $k_0\mathbf{v}_1^{(2)}+k_2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\tau}_2$, $k_0\mathbf{v}_1^{(2)}+k_3\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\tau}_3$, $k_0\mathbf{v}_1^{(2)}+k_4\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\boldsymbol{\tau}_4$.

В качестве k_0 можно выбрать квадратичный невычет в $GF(5)$: $k_0=3$. Тогда в соответствии с обозначениями (7.2.7) получим

$$\zeta_i=1/d_i,\quad k_i=3\,d_i,\quad \tau_i=3d_i^2.$$

Поэтому, когда d_i пробегает все различные ненулевые значения из $GF(5)$, $\zeta_i, \mathrm{k}_i, \tau_i$ будут принимать следующие значения:

$d_1=1,\ \zeta_1=1,\ k_1=3,\ \tau_1=3;$
$d_2=2,\ \zeta_2=3,\ k_2=1,\ \tau_2=2;$
$d_3=3,\ \zeta_3=2,\ k_3=4,\ \tau_3=2;$
$d_4=4,\ \zeta_4=4,\ k_4=2,\ \tau_4=3.$

Поэтому 11 столбцов второй половины плана есть

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{I}$, $\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2+3\mathbf{I}$, $\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+2\mathbf{I}$, $\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2+4\mathbf{I}$, $3\mathbf{v}_1^{(2)}+\mathbf{v}_2$, $3\mathbf{v}_1^{(2)}+3\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+3\mathbf{I}$, $3\mathbf{v}_1^{(2)}+\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+2\mathbf{I}$, $3\mathbf{v}_1^{(2)}+4\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+2\mathbf{I}$, $3\mathbf{v}_1^{(2)}+2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+3\mathbf{I}$.

Греко-латинские и гипергреко-латинские квадраты

Множество из n попарно ортогональных латинских квадратов размера s есть частный случай регулярного факторного плана главных эффектов, то есть регулярного плана для модели, содержащей свободный член и главные эффекты и не содержащей эффектов взаимодействия (§1 главы 5). А именно, такое множество эквивалентно симметричному равномерному плану (или ортогональной таблице $(s^2,\ n+2,\ s,\ 2)$ мощности 2 и индекса 1).

В §7 главы 6 было показано, что можно построить ортогональную таблицу $(s^2,\ s+1,\ s,\ 2)$ из конечной проективной плоскости $PG(2,s)$ порядка s, которая эквивалентна полному множеству ортогональных латинских квадратов размера s. Верно также и обратное: если существует полное множество попарно ортогональных латинских квадратов размера s, то существует конечная проективная плоскость $PG(2,s)$ порядка s [5]. Таким образом, существование полного множества ортогональных латинских квадратов размера s эквивалентно существованию конечной проективной плоскости $PG(2,s)$ порядка s. Конечная проективная плоскость порядка s существует, когда $s=p^h$, где p – простое (§2 главы 1). Способ построения полного множества ортогональных латинских квадратов (или эквивалентной ему ортогональной таблицы) для такого случая указан в §7 главы 6. В случае, когда s не является степенью простого, не известно, существует ли конечная проективная плоскость порядка s, или полное множество попарно ортогональных латинских квадратов в общем случае. Известно, в частности, что не существует полного множества ортогональных латинских квадратов, когда $s = 6,\ 14,\ 21,\ 22$. В 1782 году Эйлер (L. Euler), рассматривая проблему 36 офицеров (построение двух ортогональных латинских квадратов порядка 6), сделал предположение [6] о том, что греко-латинские квадраты порядка s не существуют для любых $s \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. Этот факт тривиален для $s = 2$. Несуществование греко-латинского квадрата порядка 6 было подтверждено в 1901 году в работе G.Tarry [7]. В 1959 году R.C.Bose и S.S.Shrikhande [8] построили контрпример к предположению Эйлера для случая $s = 22$. Позднее E.T.Parker нашел минимальный контрпример греко-латинского квадрата порядка 10 с использованием компьютера [9]:

0417298365	0786935412
8152739406	6178094523
9826374510	5027819634
5983047621	9613782045
7698415032	3902478156
6709852143	8491357260
3071986254	7859246301
1234560789	4560123789
2345601897	1234560978
4560123978	2345601897.

В 1959 году R.C.Bose, S.S.Shrikhande и E.T.Parker [10] представили статью, показывающую, что греко-латинские квадраты существуют для любого $n \geq 3$, кроме $n = 6$. Таким образом, предположение Эйлера оказалось неверным для всех $n \geq 10$.

Непосредственному построению ортогональных латинских квадратов в случае, когда $s \neq p^h$, где p – простое), посвящено много работ. Однако значительных результатов для целей факторного планирования достигнуто не было, поскольку получающиеся при этом планы отвечали слишком большому числу наблюдений по сравнению с общим числом главных эффектов участвующих в них факторов. Тем не менее, представим здесь пять ортогональных латинских квадратов размера 12, построенных в работе [11]:

0789TE612345	0789TE612345	0789TE612345	0789TE612345	0789TE612345
50789TE61234	123450789TE6	E61234507 89T	9TE612345078	789TE6123450
450789TE6123	789TE6123450	9TE612345078	50789TE61234	23450789TE61
3450789TE612	23450789TE61	123450789TE6	E6123450789T	TE6123450789
23450789TE61	89TE61234507	6123450789TE	123450789TE6	E6123450789T
123450789TE6	6123450789TE	3450789TE612	89TE61234507	450789TE6123
6123450789TE	9TE612345078	23450789TE61	3450789TE612	89TE61234507
E6123450789T	450789TE6123	TE6123450789	450789TE6123	50789TE61234.
TE6123450789	50789TE61234	789TE6123450	6123450789TE	3450789TE612
9TE612345078	TE6123450789	450789TE6123	789TE6123450	123450789TE6
89TE61234507	450789TE6123	50789TE61234	23450789TE61	9TE612345078
789TE6123450	E6123450789T	89TE61234507	TE6123450789	6123450789TE

§ 3. Ортогональные таблицы мощности 3

В §1 этой главы был приведен способ построения ортогональной таблицы $(s^t,\ s+1,\ s,\ t)$ индекса 1. В частном случае ортогональной таблицы мощности 3 можно добавить еще один фактор к этой таблице.

Теорема 7.3.1 [1]. Если $s = 2^n$ $(n > 1)$, то можно построить ортогональную таблицу $(s^3,\ s+2,\ s,\ 3)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{C}_1$, построенную в § 1 этой главы. Пользуясь обозначениями этого параграфа, добавим к матрице $\mathbf{C}_1$ еще один столбец с элементами a_{t-2}^i. Очевидно, что в полученной матрице $\mathbf{C}_2$ любые t столбцов, среди которых есть два последних столбца, содержат любую комбинацию уровней факторов ровно один раз. В этом случае $A_{t-1} = A_{t-2} = 0$, поэтому получим не равный нулю определитель Вандермонда. Если же среди t столбцов находится только один последний столбец, то результирующая матрица не будет более образовывать определитель Вандермонда. Однако она не может иметь нулевой определитель, так как определитель матрицы

$$\left\| \begin{matrix} i_1^2 & 1 \\ i_2^2 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{7.3.1}$$

равен $(i_1 - i_2)(i_1 + i_2)$. Поскольку $p = 2$, каждый элемент поля $GF(p^h)$ есть свой обратный по отношению к сложению и, следовательно, матрица (7.3.1) невырождена.

Заметим, что при $t = 3$ левая и правая границы в неравенстве (7.1.4) совпадают, а левая граница (7.1.3) вследствие теоремы 7.3.1 может быть увеличена на единицу и тогда тоже будет совпадать с правой границей этого неравенства. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3.2 [1]. Для ортогональной таблицы $(s^3,\ m,\ s,\ 3)$

$$f(s^3,\ s,\ 3) = s + 1, \text{ если } s = p^h, \tag{7.3.2}$$

где p простое, нечетное,

$$f(s^3,\ s,\ 3) = s + 2, \text{ если } s = 2^h. \tag{7.3.3}$$

Из этой теоремы, а также из способа построения соответствующих планов следует справедливость теоремы 6.6.3.

§ 4. Двухуровневые планы

Достроение планов

E.Seiden и R.Zemach [12] показали, как можно использовать теорему 7.1.5 для построения двухуровневых планов.

Теорема 7.4.1 [12]. В ортогональной таблице $(\lambda 2^t,\ t+1,\ 2,\ t)$ любые две строки, отличающиеся на четное число элементов, появляются одинаковое число раз, в то время как любые две строки, отличающиеся на нечетное число элементов, появляются вместе λ раз.

Доказательство. Пусть $(a_1,\ \dots,\ a_{t+1})$ – любая строка ортогональной таблицы $(\lambda 2^t,\ t+1,\ 2,\ t)$, где $a \in GF(2)$. Пусть $\mu(a_1,\ \dots,\ a_{t+1})$ означает число раз, которое строка $(a_1,\ \dots,\ a_{t+1})$ появляется в ортогональной таблице $(\lambda 2^t,\ t+1,\ 2,\ t)$. Так как мощность ортогональной таблицы равна 2, а индекс равен λ,

$$\mu(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_{t+1}) + \mu(a_1, \dots, a_i+1, \dots, a_j, \dots, a_{t+1}) = \lambda,$$

$$\mu(a_1, \dots, a_i+1, \dots, a_j, \dots, a_{t+1})$$
$$+\mu(a_1, \dots, a_i+1, \dots, a_j+1, \dots, a_{t+1}) = \lambda\,.$$

Тогда

$$\mu(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_{t+1}) = \mu(a_1, \dots, a_i+1, \dots, a_j+1, \dots, a_{t+1}).$$

Последовательное использование подобных равенств, очевидно, приводит к доказательству теоремы.

Теорема 7.4.2 [12]. Если $t = 2u$, то ортогональная таблица $(\lambda 2^t,\ m,\ 2,\ t)$ образует схему, удовлетворяющую условиям теоремы 7.1.5, для построения ортогональной таблицы $(\lambda 2^{t+1},\ m+1,\ 2,\ t+1)$. Если m – максимальное число факторов для первой таблицы мощности t, то $m+1$ – максимальное число факторов для второй таблицы мощности $t+1$.

Доказательство. Рассмотрим любую строку в подматрице размера $\lambda 2^t \times (t+1)$ ортогональной таблицы $(\lambda 2^t,\ m,\ 2,\ t)$. Так как $t+1$ нечетно,

$$\mu(a_1, \dots, a_{t+1}) + \mu(a_1+1, \dots, a_{t+1}+1) = \lambda.$$

Таким образом, ортогональная таблица $(\lambda 2^t,\ m,\ 2,\ t)$ образует схему, удовлетворяющую условиям теоремы 7.1.5, для построения ортогональной таблицы $(\lambda 2^{t+1},\ m+1,\ 2,\ t+1)$. Из теоремы 5.2.5 следует, что построенная таким образом ортогональная таблица обладает максимальным числом факторов.

Планы мощности 2

В данном разделе мы остановимся на изучении ортогональных таблиц $(\lambda 2^2,\ m,\ 2,\ 2)$.

Рассмотрим для ортогональной таблицы $(\lambda 2^2,\ m,\ 2,\ 2)$ матрицу

$$\|\ \mathbf{I},\ \mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_m\ \|, \qquad (7.4.1)$$

где $\mathbf{F}_i$ – вектор-столбец главного эффекта фактора F_i. Напомним, что любая матрица в (7.4.1) нормирована таким образом, что сумма квадратов элементов любого ее столбца равна $N = \lambda 2^2$. Следовательно, любой элемент матрицы (7.4.1) есть либо –1, либо +1.

В том случае, когда $\lambda = 2^n$, можно построить ортогональную таблицу (гиперкуб) $(2^{n+2},\ 2^{n+2}-1,\ 2,\ 2)$. Тогда матрица (7.4.1) будет представлять собой квадратную матрицу с ортогональными столбцами и состоять из –1 и +1.

Определение 7.4.1. Квадратная матрица $\mathbf{H}_N$ порядка N с элементами –1 и +1 называется матрицей Адамара, если

$$\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N = N\mathbf{E}_N \tag{7.4.2}$$

($\mathbf{E}_N$ – единичная матрица порядка N).

Любая матрица Адамара путем умножения соответствующих строк и столбцов на –1 (что опять приводит к матрице Адамара) может быть приведена к нормализованному виду, то есть к матрице, у которой первый столбец и первая строка состоят только из +1. Очевидно, что нормализованная матрица Адамара $\mathbf{H}_{m+1}$ будет соответствовать матрице (7.4.1) при $N = m + 1$ и, следовательно, будет эквивалентна ортогональной таблице $(m+1,\ m,\ 2,\ 2)$. Поскольку $N = \lambda 2^2$, для матрицы Адамара $\mathbf{H}_N$ (при $N > 2$) выполняется условие

$$N \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{7.4.3}$$

При $N = 2$ нормализованная матрица Адамара имеет вид

$$\begin{Vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы Адамара порядка $N \neq 2^n$ в случаях, когда существование и способы построения их известны.

Теорема 7.4.3 [13]. Пусть $\mathbf{H}_{N_1} = \{h'_{ij}\}$ и $\mathbf{H}_{N_2} = \{h''_{ij}\}$ – матрицы Адамара соответственно порядков N_1 и N_2. Тогда их прямое произведение

$$\mathbf{H}_{N_1} \times \mathbf{H}_{N_2} = \begin{Vmatrix} h'_{11}\mathbf{H}_{N_2} & h'_{12}\mathbf{H}_{N_2} & \cdots & h'_{1N_1}\mathbf{H}_{N_2} \\ h'_{21}\mathbf{H}_{N_2} & h'_{22}\mathbf{H}_{N_2} & \cdots & h'_{2N_1}\mathbf{H}_{N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h'_{N_1 1}\mathbf{H}_{N_2} & h'_{N_1 2}\mathbf{H}_{N_2} & \cdots & h'_{N_1 N_1}\mathbf{H}_{N_2} \end{Vmatrix}$$

есть матрица Адамара порядка $N_1 N_2$.

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\left(\mathbf{H}_{N_1} \times \mathbf{H}_{N_2}\right)\left(\mathbf{H}_{N_1} \times \mathbf{H}_{N_2}\right)^T = \left(\mathbf{H}_{N_1} \times \mathbf{H}_{N_2}\right)\left(\mathbf{H}_{N_1}^T \times \mathbf{H}_{N_2}^T\right) =$$
$$= \left(\mathbf{H}_{N_1}\mathbf{H}_{N_1}^T\right) \times \left(\mathbf{H}_{N_2}\mathbf{H}_{N_2}^T\right) = N_1\mathbf{E}_{N_1} \times N_2\mathbf{E}_{N_2} = N_1 N_2 \mathbf{E}_{N_1 N_2}.$$

Это доказывает теорему.

Теорема 7.4.4 [13]. Пусть $N = v + 1 = p^h + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$, где p простое. Тогда существует матрица Адамара порядка N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем обозначать через $0, 1, \ldots, v-1$ элементы поля Галуа $GF(v)$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}$ размера $(N \times N)$:

$$h_{ij} = +1 \quad (i = v \text{ или } j = v), \quad h_{ii} = -1 \quad (0 \le i \le v-1),$$

$$h_{ij} = \left(\frac{j-i}{v}\right) \quad (0 \le i \le v-1 \quad 0 \le j \le v-1, \quad i \ne j),$$

где $\left(\frac{j-i}{v}\right)$ означает символ Лежандра.

Если $i_1 \ne i_2$ и отличны от v,

$$\sum_{j=0}^{v} h_{i_1 j} h_{i_2 j} = h_{i_1 i_1} h_{i_2 i_1} + h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_2} + h_{i_1 v} h_{i_2 v}$$
$$+ \sum_{j \ne i_1, i_2, v} \left(\frac{j-i_1}{v}\right)\left(\frac{j-i_2}{v}\right). \tag{7.4.4}$$

Вследствие (1.1.3) и (1.1.4) первые два члена (7.4.4) противоположны по знакам и в сумме дают нуль. Третий член есть +1. Последняя сумма есть –1 вследствие равенства (1.1.1).

Далее, если $i_1 \ne v$,

$$\sum_{j=0}^{v} h_{vj} h_{ij} = \sum_{j=0}^{v} h_{ij} = h_{ii} + h_{iv} + \sum_{j=0}^{v-1} \left(\frac{j-i}{v}\right). \tag{7.4.5}$$

Вследствие (1.1.2) последняя сумма в (7.4.5) равна нулю. Первые два члена равны соответственно –1 и +1. Таким образом, для матрицы **H** выполняется условие попарной ортогональности столбцов, что и требовалось.

Теорема 7.4.5 [13]. Пусть $N = 2(v+1) = 2(p^h+1) \equiv 0 \pmod 4$, p простое. Тогда существует матрица Адамара порядка *N*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $p^h \equiv 1 \pmod 4$. В остальных случаях утверждение теоремы становится простым следствием теорем 7.4.3 и 7.4.4.

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{S} = \left\| \begin{matrix} 0 & \mathbf{I}_v^T \\ \mathbf{I}_v & \mathbf{Q} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathbf{I}_v$ – вектор-столбец из +1 размерности v; $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, v-1)$; $q_{ii} = 0$;

$$q_{ij} = \left(\frac{i-j}{v}\right) \quad (i \ne j),$$

$0, 1, \ldots, v-1$ – элементы поля Галуа $GF(v)$.

Используя метод доказательства теоремы 7.4.4, можно получить, что

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S} = v\mathbf{E}_{v+1}.$$

Подставим теперь в матрицу **S** вместо +1, –1 и 0 соответственно матрицы

$$\begin{Vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Можно показать, что полученная матрица является матрицей Адамара.

Теоремы 6.7.2, 7.4.3, 7.4.4 и 7.4.5 позволяют строить матрицы Адамара порядка $4l$ вплоть до 88. Вопросы построения матриц Адамара в других случаях изучались многими авторами. Наименьший порядок $N \equiv 0 \pmod 4$, для которого существование матрицы Адамара не известно к настоящему моменту, есть 668. Более подробное, чем здесь, изложение результатов в этой области можно найти, например, в работах [14, 15, 16].

Планы мощности 3

Вследствие теорем 7.1.5 и 7.4.2 ортогональные таблицы мощности 2, построенные в этом параграфе и обладающие максимальным числом факторов $(4\lambda,\ 4\lambda - 1,\ 2,\ 2)$, дают возможность построить ортогональные таблицы мощности 3 $(8\lambda,\ 4\lambda,\ 2,\ 3)$ также с максимальным числом факторов.

Таким образом, метод построения ортогональных таблиц мощности 3 с максимальным числом факторов [2, 17, 18] состоит в следующем.

Пусть $\mathbf{D}_2 = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} \in GF(2)$ – ортогональная таблица $(4\lambda,\ 4\lambda - 1,\ 2,\ 2)$, тогда

$$\mathbf{D}_3 = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_2 + \mathbf{J} & \mathbf{I} \end{Vmatrix}$$

– ортогональная таблица $(8\lambda,\ 4\lambda,\ 2,\ 3)$, где $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{J}$ – соответственно единичный и нулевой (4λ)-мерные векторы и матрица из +1 размера $(4\lambda - 1) \times 4\lambda$.

Пример 7.4.1. Рассмотрим ортогональную таблицу (4, 3, 2, 2) мощности 2 с максимальным числом факторов, равным 3:

$$\mathbf{D}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{D}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

– ортогональная таблица (8, 4, 2, 3) мощности 3 с максимальным числом факторов, равным 4.

Из результатов этого раздела следует утверждение теоремы 6.6.2.

Планы мощности 4 и 5

В этом разделе будут даны способы построения планов мощности 4 и 5, обладающих максимальным числом факторов, для тех случаев, когда число опытов N невелико.

Теорема 7.4.6 [12]. Ортогональные таблицы (16, 5, 2, 4) и (48, 5, 2, 4) существуют и обладают максимальным числом факторов.

Доказательство. Очевидно, что использование генератора (11111) дает ортогональную таблицу (16, 5, 2, 4). Из теоремы 5.2.4 следует, что 5 – максимальное число факторов для этой таблицы. Очевидно также, что ортогональная таблица (48, 5, 2, 4) существует. Она может быть получена составлением трех ортогональных таблиц (16, 5, 2, 4). Из теоремы 5.2.6 следует, что 5 – максимальное число факторов для этой таблицы.

Теорема 7.4.7 [12]. Ортогональные таблицы (32, 6, 2, 4) и (64, 8, 2, 4) существуют и обладают максимальным числом факторов.

Доказательство того, что нельзя построить указанные ортогональные таблицы с числом факторов соответственно 7 и 9, получено с использованием частных алгебраических методов для каждого плана в отдельности. Здесь его не приводим. Укажем лишь, что способ построения ортогональных таблиц задается в первом случае, например, с помощью генератора (111111), а во втором – с помощью генераторов (11111000) и (00011111).

Из теорем 7.4.6, 7.4.7, 7.4.2 и 7.1.5 следует способ построения ортогональных таблиц (32, 6, 2, 5), (64, 7, 2, 5), (96, 6, 2, 5) и (128, 9, 2, 5) с максимальным числом факторов. Таким образом, следующая теорема является следствием работы [12] (аналогичные результаты получены также в работе [19]).

Теорема 7.4.8. Ортогональные таблицы (32, 6, 2, 5), (64, 7, 2, 5), (96, 6, 2, 5) и (128, 9, 2, 5) существуют и обладают максимальным числом факторов.

Из результатов этого раздела следует справедливость теоремы 6.6.4.

Литература

1. Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of index unity. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 426–434.

2. Seiden, E. (1954). On the problem of construction of orthogonal arrays. *Ann. Math. Statist.*, **25**, 151–156.

3. Bose, R.C. and Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 508–524.

4. Addelman, S. and Kempthorne, O. (1961). Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 1167–1176.

5. Vajda, S. (1967). *The mathematics of experimental design: incomplete block designs and Latin squares*. Griffin's Statistical Monographs and Courses, N 23. New York: Hafner Publ. Co.

6. Euler, L. (1782). Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Opera Omnia*, Ser. I, Vol 7, 291–392.

7. Tarry, G. (1900). Le problème des 36 officiers. *Comptes Rendus Assoc. France Av. Sci*., **29**, part 2, 170–203.

8. Bose, R.C. and Shrikhande, S.S. (1959). On the falsity of Euler's conjecture about the nonexistence of two orthogonal Latin squares of order. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45**, 734–737.

9. Parker, E.T. (1959). Orthogonal Latin squares. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45**, 859–862.

10. Bose, R. C., Shrikhande, S. S., and Parker, E. T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canadian J. Mathematics*, **12**, 189–203.

11. Dulmage, A.L., Johnson, D.M., and Mendelson, N.S. (1961). Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares, 1. *Canad J. Math.*, **13**, 356–372.

12. Seiden, E. and Zemach, R. (1966). On orthogonal arrays. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1355–1370.

13. Paley, R.E.A.C.(1933). On orthogonal matrices. *J. Math. and Phys.*, **12**, 311–320.

14. Horadam, K.J. (2007). *Hadamard Matrices and Their Applications*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

15. Colboum, C.J. (ed.) and Dinitz, J.H. (ed.) *(2007). Handbook of Combinatorial Designs* (Discrete Mathematics and Its Applications), Second Edition. Chapman and Hall/CRC.

16. Raghavarao, D. (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. New York: Wiley.

17. Box, G.E.P. and Wilson, K.B. (1951). On the experimental attainment of optimum condition. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **13**, 1–45.

18. Box, G.E.P and Hunter, J.S. (1961). The 2к-р fractional factorial designs, Part 1. *Technometrics*, **3**, 311-351; Part 2. *Technometrics*, **3**, 449–458.

19. Gulati, B.R. (1971). Orthogonal arrays of strength five. *Trab. Estadist. y Univ. Oper.*, **22**, 51–77.

Глава 8. Построение несимметричных и неравномерных планов

§ 1. Сжатие

В этом параграфе мы представим метод сжатия уровней факторов, введенный Чакраварти (I.M. Chakravarti) [1] и затем развитый Аддельманом (S. Addelman) [2].

Пусть для t факторов $F_{i_1}, \ldots, F_{i_t}$ в плане **D** выполняется условие пропорциональности частот (3.7.4). Запишем это условие дважды для двух уровней j_1' и j_1'' фактора F_{i_1} и просуммируем левые и правые части. Тогда получим

$$N^{t-1}\left(w_{i_1 \ldots i_t}^{j_1' \ldots j_t} + w_{i_1 \ldots i_t}^{j_1'' \ldots j_t}\right) = \left(w_{i_1}^{j_1'} + w_{i_1}^{j_1''}\right) w_{i_2}^{j_2} \ldots w_{i_t}^{j_t}. \qquad (8.1.1)$$

Рассмотрим план $\mathbf{D}'$, в котором число опытов и число факторов совпадают с числом опытов и числом факторов в плане **D**. Пусть в плане $\mathbf{D}'$ все факторы, кроме F_{i_1} (обозначения для факторов и их уровней оставим прежние), имеют такое же количество уровней, что и в плане **D**, и каждый фактор F_i, кроме F_{i_1}, в плане $\mathbf{D}'$ поддерживается во всех опытах на тех же уровнях, что и соответствующий фактор в плане **D**. Фактор F_{i_1} в плане $\mathbf{D}'$ во всех опытах поддерживается на тех же уровнях, за исключением уровней j_1' и j_1''. В этих случаях фактор F_i поддерживается на одном и том же уровне (отличном от остальных уровней), который обозначим через j_1. Тогда условие (8.1.1) перепишется следующим образом:

$$N^{t-1} w_{i_1 i_2 \ldots i_t}^{j_1 j_2 \ldots j_t} = w_{i_1}^{j_1} w_{i_2}^{j_2} \ldots w_{i_t}^{j_t},$$

что является условием пропорциональности частот для j-го уровня фактора F_{i_1} и для произвольных уровней факторов $F_{i_2}, \ldots, F_{i_t}$. Очевидно, для остальных уровней фактора F_{i_1} аналогичное условие пропорциональности частот в плане **D** также выполняется. Рассмотренную операцию замены двух уровней фактора на один общий уровень будем называть сжатием фактора. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1.1. Если в плане **D** для факторов $F_{i_1}, \ldots, F_{i_t}$ выполняется условие пропорциональности частот, то это же условие выполняется для тех же факторов в плане $\mathbf{D}'$, полученном применением операции сжатия к одному или нескольким факторам плана $\mathbf{D}$.

Теорема 8.1.2 [2]. Существует регулярный план главных эффектов для факторов F_i^j на s_i уровнях $(j = 1, \dots, m_i;\ i = 1, \dots, l)$ в s^n опытах, где $s = p^h$ (p простое); $s_l < \dots < s_2 < s_1 \le s$; $\sum_{i=1}^{l} m_i \le \frac{s^n - 1}{s - 1}$.

Доказательство. Из теоремы 6.7.2 следует, что существует регулярный план главных эффектов в s^n опытах для $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов (каждый на s уровнях). Применяя теперь к некоторым факторам операцию сжатия и при необходимости вычеркивая часть столбцов, вследствие теоремы 8.1.1, получим искомый регулярный план главных эффектов.

Пример 8.1.1. Рассмотрим, например, процедуру построения регулярного плана главных эффектов $2^2 \times 3^2//9$. Построение начнем с регулярного симметричного плана главных эффектов $3^4//9$, который в соответствии с результатом §7 главы 6 записан в табл. 12.

Таблица 12
Построение плана $2^2 \times 3^2//9$ из плана $3^4//9$

План $3^4//9$				**План $2^2 \times 3^2//9$**			
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	2	0	1	1	2
0	2	2	1	0	0	2	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	2	0	1	1	2	0
1	2	0	2	1	0	0	2
2	0	2	2	0	0	2	2
2	1	0	1	0	1	0	1
2	2	1	0	0	0	1	0

Применим операцию сжатия к первым двум факторам плана $3^4//9$ в соответствии со следующей схемой:

Трехуровневый фактор		**Двухуровневый фактор**
0	$\longrightarrow$	0
1	$\longrightarrow$	1
2	$\longrightarrow$	0

Тогда план $3^4//9$ преобразуется в искомый план главных эффектов $2^2 \times 3^2//9$ (табл. 12).

§ 2. Расщепление

В этом параграфе мы представим технику расщепления факторов, введенную Аддельманом (S. Addelman) [2].

Пусть $\mathbf{D}_1$ – регулярный факторный план мощности t_1 для m_1 факторов $F_1, \dots, F_{m_1}$ в N опытах. Пусть существует регулярный факторный план $\mathbf{D}_2$ мощности t_2 в N опытах для m_2 факторов $F_{m_1+1}, \dots, F_{m_1+m_2}$ такой, что каждому уровню фактора F_{m_1} плана $\mathbf{D}_1$ отвечает только одна комбинация уровней факторов $F_{m_1+1}, \dots, F_{m_1+m_2}$ плана $\mathbf{D}_2$. Тогда замену фактора F_{m_1} в плане $\mathbf{D}_1$ множеством m_2 факторов $F_{m_1+1}, \dots, F_{m_1+m_2}$ плана $\mathbf{D}_2$ будем называть расщеплением фактора F_{m_1} на m_2 факторов плана $\mathbf{D}_2$.

Рассмотрим любые t_2 факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{t_2}}$ плана $\mathbf{D}_2$. Каждому уровню F_{m_1} отвечает только одна комбинация уровней факторов $F_{m_1+1}, \dots, F_{m_1+m_2}$, а следовательно, и только одна комбинация уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{t_2}}$. Однако каждой комбинации уровней факторов $F_{i_1}, \dots, F_{i_{t_2}}$ соответствует, вообще говоря, несколько уровней фактора F_{m_1}.

Для t_2 факторов плана $\mathbf{D}_2$ (без ограничения общности возьмем первые t_2 факторов $F_{m_1+1}, \dots, F_{m_1+t_2}$) рассмотрим комбинацию их уровней j_{m_1+1}, $\dots, j_{m_1+t_2}$ соответственно. Вследствие регулярности плана $\mathbf{D}_2$ мощности t_2

$$N^{t_2-1} w_{m_1+1 \dots m_1+t_2}^{j_{m_1+1} \cdots j_{m_1+t_2}} = w_{m_1+1}^{j_{m_1+1}} \dots w_{m_1+t_2}^{j_{m_1+t_2}}. \tag{8.2.1}$$

Пусть рассмотренным комбинациям уровней факторов $F_{m_1+1}, \dots$, $F_{m_1+t_2}$ отвечают уровни $j_{m_1}^1, \dots, j_{m_1}^n$ фактора F_{m_1} то есть

$$w_{m_1}^{j_{m_1}^1} + \dots + w_{m_1}^{j_{m_1}^n} = w_{m_1+1 \dots m_1+t_2}^{j_{m_1+1} \cdots j_{m_1+t_2}}, \tag{8.2.2}$$

и

$$w_{1 \dots (t_1-1) m_1}^{j_1 \cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^1} + \dots + w_{1 \dots (t_1-1) m_1}^{j_1 \cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^n} = w_{1 \dots (t_1-1)(m_1+1) \dots (m_1+t_2)}^{j_1 \cdots j_{t_1-1} j_{m_1+1} \cdots j_{m_1+t_2}}. \tag{8.2.3}$$

Следствием равенств (8.2.1) и (8.2.2) будет равенство

$$N^{t_2-1} \left(w_{m_1}^{j_{m_1}^1} + \dots + w_{m_1}^{j_{m_1}^n} \right) = w_{m_1+1}^{j_{m_1+1}} \dots w_{m_1+t_2}^{j_{m_1+t_2}}. \tag{8.2.4}$$

Для $t_1 - 1$ факторов плана $\mathbf{D}_1$ (без ограничения общности возьмем первые $t_1 - 1$ факторов $F_1, \dots, F_{t_1-1}$) вследствие регулярности плана $\mathbf{D}_1$ мощности t_1 для любых уровней $j_1, \dots, j_{t_1-1}$ этих факторов соответственно

$$N^{t_1-1} w_{1\ldots(t_1-1)m_1}^{j_1\cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^1} = w_1^{j_1} \ldots w_{t_1-1}^{j_{t_1-1}} w_{m_1}^{j_{m_1}^1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{8.2.5}$$
$$N^{t_1-1} w_{1\ldots(t_1-1)m_1}^{j_1\cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^n} = w_1^{j_1} \ldots w_{t_1-1}^{j_{t_1-1}} w_{m_1}^{j_{m_1}^n}.$$

Суммируя равенства (8.2.5), с учетом равенства (8.2.4) получим

$$\begin{aligned} N^{t_2-1} N^{t_1-1} \left(w_{1\ldots(t_1-1)m_1}^{j_1\cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^1} + \cdots + w_{1\ldots(t_1-1)m_1}^{j_1\cdots j_{t_1-1} j_{m_1}^n} \right) \\ = w_1^{t_1} \ldots w_{t_1-1}^{j_{t_1-1}} w_{m_1+1}^{j_{m_1+1}} \ldots w_{m_1+t_2}^{j_{m_1+t_2}}. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

Преобразуя левую часть равенства (8.2.6) в соответствии с соотношением (8.2.3), получим

$$N^{t_2-1} N^{t_1-1} w_{1\ldots(t_1-1)(m_1+1)\ldots(m_1+t_2)}^{j_1\cdots j_{t_1-1} j_{m_1+1}\cdots j_{m_1+t_2}}$$
$$= w_1^{j_1} \ldots w_{t_1-1}^{j_{t_1-1}} w_{m_1+1}^{j_{m_1+1}} \ldots w_{m_1+t_2}^{j_{m_1+t_2}}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 8.2.1. Расщепление фактора F_i в регулярном факторном плане $\mathbf{D}_1$ мощности t_1 для m_1 факторов на m_2 факторов регулярного факторного плана $\mathbf{D}_2$ мощности t_2 приводит к регулярному факторному плану $\mathbf{D}$ мощности $t = \min(t_1,\ t_2)$ для $m_1 + m_2 - 1$ факторов. При этом выполняется условие пропорциональности частот для любого множества факторов плана $\mathbf{D}$, содержащей не более $t_1 - 1$ факторов плана $\mathbf{D}_1$ и не более t_2 факторов плана $\mathbf{D}_2$.

Регулярный факторный план $\mathbf{D}_2$, фигурирующий в условии теоремы 8.2.1, легко может быть построен, если существует регулярный факторный план $\mathbf{D}_2'$ мощности t_2 в s_i опытах и если все уровни фактора F_i появляются в плане $\mathbf{D}_1$ одинаковое число раз λ_i. Тогда искомый план $\mathbf{D}_2$, очевидно, может быть получен составлением λ_i раз плана $\mathbf{D}_2'$.

Следствие 1 теоремы 8.2.1. Пусть все s_i уровней фактора F_i регулярного плана $\mathbf{D}_1$ в N опытах для m_1 факторов $F'_1, \ldots, F'_{m_1}$ с числами уровней $s'_1,\ \ldots,\ s'_{m_1}$ соответственно мощности t_1 появляются в плане одинаковое число раз. И пусть существует регулярный план $\mathbf{D}_2$ для m_2 факторов $F''_1, \ldots, F''_{m_2}$ с числами уровней $s''_1, \ldots, s''_{m_2}$ соответственно мощности t_2 в s_i опытах. Тогда существует регулярный план $\mathbf{D}$ мощности $t = \min(t_1,\ t_2)$ в N опытах для $m_1 + m_2 - 1$ факторов $F'_1, \ldots, F'_{i-1}, F'_{i+1}, F'_{m_1}, F''_1, \ldots, F''_{m_2}$ с числами уровней $s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, s'_{m_1}$, $s''_1, \ldots, s''_{m_2}$.При этом выполняется условие пропорциональности частот для любого множества факторов плана $\mathbf{D}$, содержащей не более $t_1 - 1$ факторов плана $\mathbf{D}_1$ и не более t_2 факторов плана $\mathbf{D}_2$.

Пример 8.2.1. В качестве примера применения теоремы 8.2.1 и следствия 1 к ней рассмотрим регулярный факторный план мощности 2 для пяти четырехуровневых факторов $4^5//16$ (табл. 13).

Первый фактор плана $4^5//16$ расщепим на два двухуровневых фактора полного плана 2^2 следующим образом:

Четырехуровневый фактор		**Двухуровневые факторы**
0	$\longrightarrow$	0 0
1	$\longrightarrow$	1 0
2	$\longrightarrow$	0 1
3	$\longrightarrow$	1 1

Результирующий план, записанный в табл. 13, имеет мощность 2, поэтому он допускает получение попарно ортогональных главных эффектов двухуровневых и четырехуровневых факторов. Кроме того, любое множество факторов, содержащее два двухуровневых фактора и один четырехуровневый фактор, удовлетворяет условию пропорциональности частот. Поэтому план допускает также получение двухфакторного эффекта взаимодействия двухуровневых факторов, ортогонального ко всем главным эффектам.

Таблица 13
Преобразования плана $4^5//16$

План $4^5//16$					**План $2^2 \times 4^4//16$**						**План $2^6 \times 4^3//16$**								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
2	0	2	2	2	0	1	0	2	2	2	0	1	1	0	0	0	2	2	2
3	0	3	3	3	1	1	0	3	3	3	1	1	0	0	0	0	3	3	3
0	1	1	2	3	0	0	1	1	2	3	0	0	0	1	0	1	1	2	3
1	1	0	3	2	1	0	1	0	3	2	1	0	1	1	0	1	0	3	2
2	1	3	0	1	0	1	1	3	0	1	0	1	1	1	0	1	3	0	1
3	1	2	1	0	1	1	1	2	1	0	1	1	0	1	0	1	2	1	0
0	2	2	3	1	0	0	2	2	3	1	0	0	0	0	1	1	2	3	1
1	2	3	2	0	1	0	2	3	2	0	1	0	1	0	1	1	3	2	0
2	2	0	1	3	0	1	2	0	1	3	0	1	1	0	1	1	0	1	3
3	2	1	0	2	1	1	2	1	0	2	1	1	0	0	1	1	1	0	2
0	3	3	1	2	0	0	3	3	1	2	0	0	0	1	1	0	3	1	2
1	3	2	0	3	1	0	3	2	0	3	1	0	1	1	1	0	2	0	3
2	3	1	3	0	0	1	3	1	3	0	0	1	1	1	1	0	1	3	0
3	3	0	2	1	1	1	3	0	2	1	1	1	0	1	1	0	0	2	1

Как следствие теоремы 8.2.1 может быть получена процедура Аддельмана (S. Addelman) [2] построения регулярных планов главных эффектов, заключающаяся в замене фактора с s^n уровнями ($s = p^h$, p простое) на $(s^n - 1)/(s - 1)$ факторов с s уровнями.

Пусть $s_i = p^h$ (p простое). Тогда в соответствии с теоремой 6.7.2 существует регулярный план главных эффектов в p^h опытах для $\left(p^h - 1\right)/(p - 1)$ p-уровневых факторов. Пусть в плане главных эффектов $\mathbf{D}_1$ равномерный фактор F_i имеет s_i уровней. Тогда по следствию 1 к теореме 8.2.1 этот фактор можно расщепить на $\left(p^h - 1\right)/(p - 1)$ p-уровневых факторов.

Следствие 2 теоремы 8.2.1. Пусть существует регулярный план главных эффектов для m факторов $F_1, \dots, F_m$ и равномерный фактор F_i имеет $s_i = p^h$ (p простое) уровней. Тогда существует регулярный план главных эффектов для $\left(p^h - 1\right)/(p - 1)$ p-уровневых факторов и для факторов $F_1, \dots, F_{i-1}$, $F_{i+1}, \dots, F_m$ с числами уровней $s_1, \dots, s_{i-1}$, $s_{i+1}, \dots, s_m$ соответственно.

Пример 8.2.2. Рассмотрим опять регулярный план $4^5//16$. Расщепление первого и второго четырехуровневых факторов на два множества по три двухуровневых фактора по следствию 2 к теореме 8.2.1 можно произвести с использованием следующего соответствия:

Четырехуровневый фактор		**Двухуровневые факторы**
0	$\longrightarrow$	0 0 0
1	$\longrightarrow$	1 0 1
2	$\longrightarrow$	0 1 1
3	$\longrightarrow$	1 1 0

В результате получим регулярный факторный план $2^6 \times 4^3//16$ мощности 2 (табл. 13).

§ 3. Восстановление

В этом параграфе мы представим технику восстановления факторов, введенную Аддельманом (S. Addelman) [2]. Этот метод в некотором смысле является обратным по отношению к операции расщепления.

В соответствии с результатами §7 главы 6 при $N = s^n$, $s = p^h$ (p простое) существует регулярный факторный план $\mathbf{D}_N$ мощности 2 в N опытах для $(s^n - 1)/(s - 1)$ s-уровневых факторов. Для lN опытов регулярный факторный план $\mathbf{D}_{lN}$ мощности 2 для $(s^n - 1)/(s - 1)$ s-уровневых факторов можно получить, повторяя l раз план $\mathbf{D}_N$. Поставим в соответствие плану $\mathbf{D}_{lN}$ N-уровневый фактор F так, чтобы каждой комбинации уровней всех факторов в $\mathbf{D}_{lN}$ соответствовал один и тот же уровень фактора F и чтобы каждому уровню фактора F соответствовала одна и та же комбинация уровней факторов $\mathbf{D}_{lN}$.

Предположим теперь, что часть столбцов некоторого регулярного плана **D** мощности 2 образует план $\mathbf{D}_{lN}$. Тогда все главные эффекты факторов, отвечающих этим столбцам, будут ортогональны любым другим главным эффектам факторов плана $\mathbf{D}$. Заменим столбцы плана $\mathbf{D}$, составляющие план $\mathbf{D}_{lN}$, на столбец, отвечающий фактору *F*. В плане $\mathbf{D}_N$ в соответствии с результатами §1 главы 6 любой контраст может быть получен как линейная комбинация главных эффектов его $(s^n-1)/(s-1)$ s-уровневых факторов. Поэтому любой главный эффект фактора *F* будет также ортогонален любым главным эффектам оставшихся в плане **D** факторов.

Такая замена столбцов плана $\mathbf{D}$, образующих план $\mathbf{D}_{lN}$, на столбец, отвечающий фактору F, называется восстановлением.

Пример 8.3.1 [2]**.** Рассмотрим регулярный факторный план 2^7 мощности 2 в восьми опытах (табл. 14). Последние три столбца этого плана представляют собой дважды повторенный регулярный факторный план $2^3//4$ мощности 2:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Поэтому можно использовать операцию восстановления для получения четырехуровневого фактора, используя следующее соответствие:

Двухуровневые факторы		**Четырехуровневый фактор**
0 0 0	$\longrightarrow$	0
1 1 0	$\longrightarrow$	1
1 0 1	$\longrightarrow$	2
0 1 1	$\longrightarrow$	3

В результате такой замены получим регулярный факторный план $2^4\times 4//8$ мощности 2 (табл. 14).

Таблица 14

Построение плана $\mathbf{2^4\times 4//8}$ из плана $\mathbf{2^7//8}$

План $2^7//8$		**План $2^4\times 4//8$**
0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0
1 0 0 1 1 1 0		1 0 0 1 1
0 1 0 1 1 0 1		0 1 0 1 2
1 1 0 0 0 1 1		1 1 0 0 3
0 0 1 1 0 1 1		0 0 1 1 3
1 0 1 0 1 0 1		1 0 1 0 2
0 1 1 0 1 1 0		0 1 1 0 1
1 1 1 1 0 0 0		1 1 1 1 0

Операция восстановления может быть использована также в следующей более общей ситуации. Пусть план **D** позволяет получить полное множество попарно ортогональных главных эффектов и двухфакторных эффектов взаимодействия некоторых двух факторов F_1 и F_2 с числами уровней соответственно s_1 и s_2. Рассмотрим теперь фактор F такой, что одинаковым комбинациям уровней факторов F_1 и F_2 соответствуют одинаковые уровни F и одинаковым уровням F соответствуют одинаковые комбинации уровней факторов F_1 и F_2. Очевидно, что любые главные эффекты факторов F_1 и F_2, а также любые эффекты взаимодействия этих факторов являются главными эффектами фактора F. Общее число попарно ортогональных главных эффектов и двухфакторных эффектов взаимодействия факторов F_1 и F_2 равно $(s_1 - 1) + (s_2 - 1) + (s_1 - 1)(s_2 - 1) = s_1 s_2 - 1$. Полное множество попарно ортогональных главных эффектов фактора F также равно $s_1 s_2 - 1$ (число уровней фактора F равно $s_1 s_2$). Поэтому любой главный эффект F может быть получен как линейная комбинация главных эффектов и двухфакторных эффектов взаимодействия факторов F_1 и F_2. Поэтому если главные эффекты и эффекты взаимодействия факторов F_1 и F_2 для плана **D** ортогональны некоторым главным эффектам и эффектам взаимодействия некоторых факторов, то этим же эффектам будут ортогональны все главные эффекты фактора F.

Рассмотрим, например, регулярный план главных эффектов, в котором эффекты взаимодействия факторов F_1 и F_2 ортогональны всем главным эффектам всех факторов плана. Тогда, используя описанную операцию восстановления и заменяя в плане факторы F_1 и F_2 на фактор F, получим также регулярный план главных эффектов.

Аналогичные построения могут быть использованы при рассмотрении полного множества попарно ортогональных главных эффектов и всех эффектов взаимодействия нескольких факторов. Тогда будет справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3.1. Пусть план позволяет получить множество попарно ортогональных эффектов, состоящее из множества всех главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_1, \dots, F_r$ и множества Ω некоторых главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $F_{r+1}, \dots, F_m$.Тогда замена факторов $F_1, \dots, F_r$ на фактор F, полученный применением операции восстановления, приводит к плану, позволяющему получить множество попарно ортогональных эффектов, состоящее из множества всех главных эффектов фактора F и множества Ω.

Если процедура восстановления используется для геометрического плана, то результирующий план мы также будем называть геометрическим.

§ 4. Произведение планов

В этом параграфе мы разовьем процедуру произведения планов, предложенную I.M. Chakravarti [1] и, в частности, изучим, как она может быть использована в сочетании с процедурой восстановления.

Метод произведения

Теорема 8.4.1. Пусть существуют n регулярных факторных планов D_i $(i = 1, \dots, n)$ мощности t_i в N_i опытах для m_i факторов F_j^i $(j = 1, \dots, m_i)$ с числами уровней $s_j^{(i)}$ соответственно. Тогда существует регулярный факторный план **D** мощности $t = \min(t_1, \dots, t_n)$ в $N = \prod_{i=1}^n N_i$ опытах для $m = \sum_{i=1}^n m_i$ факторов F_j^i с числами уровней $s_j^{(i)}$ соответственно. Более того, в плане **D** выполняется условие пропорциональности частот для любого множества факторов, включающего не более t_i факторов из множества факторов F_j^i.

Доказательство. Рассмотрим два плана $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, удовлетворяющие условию теоремы. Построим теперь план $\mathbf{D}_{12}$ следующим образом. Повторяя N_2 раз каждую строку плана $\mathbf{D}_1$, получим матрицу $\mathbf{D}_1'$. Повторяя N_1 раз план $\mathbf{D}_2$, получим матрицу $\mathbf{D}_2'$. Образуем теперь план

$$\mathbf{D}_{12} = \| \ \mathbf{D}_1' \quad \mathbf{D}_2' \ \|,$$

состоящий из $N_1 N_2$ строк. Рассмотрим любую комбинацию уровней любых t_1 факторов плана $\mathbf{D}_1$. Число появлений этой комбинации обозначим через w^1, а числа появлений соответствующих уровней факторов – через $w_1^1, \dots,$ $w_{t_1}^1$. Аналогичные обозначения введем для плана $\mathbf{D}_2$. По условию теоремы для $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ выполняется условие пропорциональности частот для любых множеств соответственно из t_1 и t_2 факторов. Следовательно,

$$N_1^{t_1-1} w^1 = w_1^1 \dots w_{t_1}^1, \tag{8.4.1}$$
$$N_2^{t_2-1} w^2 = w_1^2 \dots w_{t_2}^2. \tag{8.4.2}$$

Будем обозначать соответствующие числа появлений уровней факторов в плане $\mathbf{D}_{12}$ буквой W. Тогда, очевидно,

$$W_i^1 = w_i^1 N_2, \quad W_i^2 = w_i^2 N_1. \tag{8.4.3}$$

Для числа совместного появления W в $\mathbf{D}_{12}$ всех уровней рассматриваемых $t_1 + t_2$ факторов справедливо равенство

$$W = w^1 w^2. \tag{8.4.4}$$

Перемножая левые и правые части равенств (8.4.1) и (8.4.2), получим

$$N_1^{t_1-1} N_2^{t_2-1} w^1 w^2 = w_1^1 \dots w_{t_1}^1 w_1^2 \dots w_{t_2}^2. \tag{8.4.5}$$

Подставим выражения (8.4.3) и (8.4.4) в (8.4.5). Тогда

$$N_1^{t_1-1}N_2^{t_2-1}W = N_1^{-t_2}N_2^{-t_1}W_1^1 \dots W_{t_1}^1 W_1^2 \dots W_{t_2}^2,$$

или

$$N_{12}^{t_1+t_2-1}W = W_1^1 \dots W_{t_1}^1 W_1^2 \dots W_{t_2}^2, \qquad (8.4.6)$$

где $N_{12} = N_1 N_2$.

Равенство (8.4.6) является условием пропорциональности частот для рассматриваемых двух множеств факторов (t_1 факторов из $\mathbf{D}_1$ и t_2 факторов из $\mathbf{D}_2$). Распространение доказательства на случай n планов не составляет труда.

Теорема, аналогичная теореме 8.4.1, для частного случая ортогональных таблиц доказана I.M.Chakravarti [1].

Теорема 8.4.1 показывает, что план $\mathbf{D}$ мощности $t = \min(t_1, \dots, t_n)$ позволяет получать попарно ортогональные эффекты двух видов. К первому виду относятся главные эффекты и эффекты взаимодействия, которые входили в попарно ортогональные множества эффектов каждого плана $\mathbf{D}_i$ в отдельности. Ко второму виду относятся эффекты взаимодействия факторов, из которых плану $\mathbf{D}_i$ отвечают не более $[t_i/2]$.

Сочетание методов произведения и восстановления

Интересный способ построения регулярных факторных планов можно получить, если последовательно применять процедуру произведения планов и операцию восстановления.

Пусть $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ – два регулярных факторных плана мощности 2. Образуем произведение этих планов $\mathbf{D}_{12}$, которое будет также представлять собой регулярный факторный план мощности 2. Кроме главных эффектов всех факторов, план $\mathbf{D}_{12}$ позволяет получить также попарно ортогональные двухфакторные эффекты взаимодействия факторов, из которых один соответствует плану $\mathbf{D}_1$, а другой – плану $\mathbf{D}_2$. Эти двухфакторные эффекты взаимодействия будут также ортогональны ко всем главным эффектам. В соответствии с результатами §3 этой главы в этом случае может быть использована операция восстановления, заменяющая указанную пару факторов с числами уровней, скажем, s_1 и s_2 на фактор с числом уровней $s_1 s_2$. Операция восстановления может быть использована многократно с тем лишь очевидным ограничением, чтобы на каждой стадии не использовались факторы, принимавшие участие в предшествующих операциях восстановления.

Частным случаем указанного способа построения является случай, когда план $\mathbf{D}_1$ – однофакторный, то есть содержит s уровней одного фактора F. Тогда план $\mathbf{D}_{12}$ образуется повторением плана $\mathbf{D}_2$ с каждым из уровней фактора F. Операция восстановления, примененная к факторам F и F' (F' – любой фактор из $\mathbf{D}_2$), приводит к плану, образованному из следующих планов: $\mathbf{D}_2$; $\mathbf{D}_2$ с заменой уровней $0,1, \dots, s'-1$ фактора F' соответственно на $s', s'+1, \dots, 2s'-1$; $\mathbf{D}_2$ с заменой этих же уровней соответственно на $2s', 2s'+1, \dots, 3s'-1$ и т. д. Последний составляющий план образуется из $\mathbf{D}_2$ с заменой уровней $0, 1, \dots, s'-1$ фактора F' соответственно на $(s-1)s', (s-1)s'+1, \dots, ss'-1$.

Пример 8.4.1 [2]. Для построения регулярного плана главных эффектов $2 \times 3^2 \times 5//18$ построим сначала в соответствии с результатами §7 главы 6 симметричный регулярный план $3^4//9$ мощности 2. Обозначим факторы этого плана через F_1, F_2, F_3 и F_4. Повторим теперь все 9 опытов, заменяя уровни 0, 1 и 2 фактора F_4 на 3, 4 и 5 соответственно. В полученном плане $3^3 \times 6//18$ применим операцию сжатия к факторам F_1 и F_4. В результате получим регулярный план главных эффектов $2 \times 3^2 \times 5//18$.

Другим частным случаем указанной процедуры является способ построения, предложенный Марголиным (B.H. Margolin) [3], регулярного факторного плана $r \times 2^n$ мощности 3 в $r(n+1)$ опытах $(r = 2l)$ при условии существования регулярного плана главных эффектов в $n+1$ опытах для n двухуровневых факторов. Пусть $\mathbf{D} = \{a_{ij}\}$ $\left(a_{ij} \in GF(2)\right)$ – ортогональная таблица $(n+1,\ n,\ 2,\ 2)$. Тогда, используя способ построения двухуровневого плана мощности 3 (см. §4 главы 7) и применяя изложенную процедуру, получим план

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{D}+\mathbf{J} & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{D} & (r-2)\mathbf{I} \\ \mathbf{D}+\mathbf{J} & (r-1)\mathbf{I} \end{matrix} \right\|, \tag{8.4.7}$$

представляющий собой искомый регулярный план $r \times 2^n$ мощности 3 (где $\mathbf{J}$ – матрица из +1). Из неравенства (5.2.2) следует, что число опытов в таком плане должно быть не менее $r(n+1)$. Таким образом, в построенном плане (8.4.7) число опытов минимально.

Пример 8.4.2. Рассмотрим два регулярных плана главных эффектов. Первый план $\mathbf{D}_1$ для четырех трехуровневых факторов F_1, F_2, F_3 и F_4 в девяти опытах. А второй план $\mathbf{D}_2$ для трех двухуровневых факторов F_5, F_6 и F_7 в четырех опытах. Произведение этих планов $\mathbf{D}_{12}$ дает возможность получить попарно ортогональные главные эффекты четырех трехуровневых и трех двухуровневых факторов (обозначения которых оставим прежние), а также все двухфакторные эффекты взаимодействия, отвечающие одному трехуровневому и одному двухуровневому фактору. К парам факторов F_1 и F_5, F_2 и F_6, F_3 и F_7 можно применить операцию восстановления. В результате получим регулярный план главных эффектов $3 \times 6^3//36$. Этот план можно представить в виде двух ортогональных F-квадратов $F(6;\ 1^6)$ и $F(6;\ 2^3)$.

§ 5. Ортогональные F-квадраты

Как это следует из теоремы 5.1.3, множество попарно ортогональных латинских квадратов размера s есть частный случай регулярного факторного плана мощности 2 в s^2 опытах. Таким образом, при $s = p^h$ (p простое) построение ортогональных F-квадратов можно производить при помощи изложенных выше методов. Случай $s \neq p^h$ мало исследован. Для наиболее важного с точки зрения приложений случая $s = 6$ ортогональные разбиения латинского квадрата размера 6 исследованы D.J. Finney [4]. Мы приведем здесь некоторые его результаты.

Самое крайнее из известных разбиений латинского квадрата размера 6 есть квадрат $F(6;\ 1^4,\ 2)$. Оба квадрата приведены ниже:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0, \end{matrix} \qquad (8.5.1)$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 4 & 2. \end{matrix} \qquad (8.5.2)$$

Используя операцию сжатия, из квадрата (8.5.2) можно построить следующие разбиения латинского квадрата (8.5.1): $F(6;\ 2^3)$, $F(6;\ 3^2)$, $F(6;\ 1^2,\ 2,\ 2)$ и т. п. Аналогичным образом могут быть получены различные множества из двух F-квадратов размера 6. Ортогональные F-квадраты (8.5.1) и (8.5.2) соответствуют регулярному плану главных эффектов $5 \times 6^3//36$. Приведем здесь также множество из двух взаимно ортогональных разбиений латинского квадрата

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad (8.5.3)$$

вида $F(6;\ 1^3,\ 3)$:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1. \end{matrix} \tag{8.5.4}$$

F-квадраты (8.5.3) и (8.5.4) соответствуют регулярному плану главных эффектов $4^2 \times 6^3//36$.

§ 6. Частные методы

Метод Старкса

Серия регулярных планов главных эффектов $2^n \times 3^m$ $(n + m \leq 7)$ в 16 опытах построена Старксом (T.H. Starks) [5]. Метод построения основан на использовании регулярного плана $2^7//8$ мощности 2:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{8.6.1}$$

Матрица $\mathbf{D}_1$ была преобразована (подбором) в матрицу

$$\mathbf{D}_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

так, что план

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_2 \\ 2\mathbf{J} - \mathbf{D}_2 \end{Vmatrix}$$

есть регулярный план главных эффектов $3^7//16$. Любой столбец этого плана с помощью операции сжатия может быть преобразован в двухуровневый с равномерным чередованием уровней.

Метод Марголина

Еще один метод построения регулярных планов мощности 2, включающих факторы на двух и трех уровнях, принадлежит Марголину (B.H. Margolin) [6].

Пусть $\mathbf{D} = \| \mathbf{D}', \quad \mathbf{D}'' \|$ – ортогональная таблица мощности 2 $(n,\ n-1, 2, 2)$, элементы первого столбца $\mathbf{D}'$ которой есть 0 и 2, а элементы остальной подматрицы $\mathbf{D}''$ есть 0 и 1. Тогда план $2^{2n-4} \times 3//2n$ задается следующей матрицей:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{D}' & \mathbf{D}'' & \mathbf{D}'' \\ \mathbf{I} & \mathbf{D}'' & \mathbf{D}'' + \mathbf{J} \end{matrix} \right\|, \tag{8.6.2}$$

где $\mathbf{I}$ – n-мерный единичный вектор, $\mathbf{J}$ – матрица из 1, и сложение элементов производится в поле Галуа $GF(2)$.

Принадлежность плана, задаваемого матрицей (8.6.2), к классу регулярных планов мощности 2 легко устанавливается непосредственной проверкой попарной ортогональности главных эффектов. Матрица

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{D}' - 1 & \mathbf{I} & 2\mathbf{D}'' - \mathbf{J} & 2\mathbf{D}'' - \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & 2\mathbf{D}'' - \mathbf{J} & \mathbf{J} - 2\mathbf{D}'' \end{matrix} \right\|$$

(сложение производится в классе целых чисел) содержит эти векторы главных эффектов. Ортогональность их следует из свойств исходной ортогональной таблицы мощности 2.

С помощью метода Марголина можно построить, например, такие регулярные планы главных эффектов: $2^{20} \times 3//24$, $2^{36} \times 3//40$, $2^{44} \times 3//48$, $2^{52} \times 3//56$.

Комбинация различных методов этого параграфа позволяет получить другие регулярные планы главных эффектов. Марголин объявил, но не представил в своей работе [6] регулярные планы главных эффектов $2^{16} \times 3^7//32$ and $2^{48} \times 3^7//64$. Метод их построения дан в работе Аддельмана (S. Addelman) [7].

Некоторые из тех планов, которые были построены Аддельманом, были также получены с помощью другой техники Е.В.Марковой и А.Н.Лисенковым [8] и названы сложными совмещенными планами.

Пополнение планов Аддельмана-Кемпзорна

В этом разделе рассматривается метод пополнения регулярных симметричных факторных планов главных эффектов Аддельмана-Кемпзорна одним двухуровневым фактором [9].

Каждый план, соответствующий ортогональной таблице Аддельмана-Кемпзорна может быть представлен в виде

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{Vmatrix}.$$

Число строк в подматрице A_1 равно числу строк в подматрице A_2 и равно s^l. Пусть l столбцов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ образуют полный план s^l. Тогда любой столбец, как в A_1, так и в A_2 может быть представлен в виде

$$q\mathbf{v}_1^{(2)} + q_1\mathbf{v}_1 + q_2\mathbf{v}_2 + \cdots + q_s\mathbf{v}_s + \mathbf{b}, \tag{8.6.3}$$

где $\mathrm{b}^{\mathrm{T}} = (b, \dots, b)$; $q, q_1, \dots, q_s$, b и элементы столбцов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ принадлежат полю Галуа $GF(s)$; через $\mathbf{v}_i^{(2)}$ обозначен столбец, состоящий из квадратов элементов столбца $\mathbf{v}_i$.

С помощью леммы 4 работы [10] легко показать, что столбец (8.6.3) содержит каждый из s элементов поля $GF(s)$ ровно s^{l-1} раз. Отсюда следует, что план

$$\begin{Vmatrix} 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{Vmatrix}^T.$$

является несимметричным регулярным факторным планом главных эффектов (регулярным планом мощности 2). Это утверждение легко доказывается с помощью условия пропорциональности частот и полученного выше свойства (8.6.3) столбцов подматриц A_1 и A_2.

Пример 8.6.1. Ортогональные таблицы (18, 7, 3, 2) и (50, 11, 5, 2) могут быть преобразованы в регулярные планы главных эффектов $2 \text{ x } 3^7//18$ и $2 \text{ x } 5^{11}//50$ соответственно. Первый из них (план $2 \text{ x } 3^7//18$) представлен ниже:

$$\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2
\end{Vmatrix}$$

План 2 x $5^{11}//50$ дан в каталоге (план $\mathbf{D}_{50}$, #50).

Несимметричные планы 2^l x 4^n x $8^m//64$ главных эффектов

Серии планов вида 2^l x 4^n x $8^m//64$ была получена в работе [9] на основании некоторого особого представления конечной проективной геометрии $PG(5,2)$.

Рассмотрим полный план $2^6//64$. Каждому опыту этого плана поставим в соответствие точку $(x_1, \dots, x_6)$ конечного пространства $EG(6,2)$. Координаты точек принадлежат конечному полю – полю Галуа – $GF(2)$. Будем обозначать эти координаты через 0 и 1. Рассмотрим гиперплоскость

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_6x_6 = 0 \tag{8.6.4}$$

в $EG(6,2)$ ($a_i \in GF(2)$ и не равны одновременно нулю). Если a_0 будет принимать в (8.6.4) оба различных значения из $GF(2)$, то в качестве решения (8.6.4) получим пучок $P(a_1, \dots, a_6)$ из двух параллельных плоскостей в $EG(6,2)$. Числа $a_1, \dots, a_6$ будут координатами пучка $P(a_1, \dots, a_6)$. Очевидно, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством пучков $P(a_1, \dots, a_6)$ и множеством их координат $a_1, \dots, a_6$. Поэтому множество всех пучков $P(a_1, \dots, a_6)$ представляет собой конечную проективную геометрию $PG(5,2)$. Имеется всего 63 точки в $PG(5,2)$ и, следовательно, 63 различных пучка параллельных плоскостей в $EG(6,2)$. Каждому из пучков $P(a_1, \dots, a_6)$, или точке $(a_1, \dots, a_6)$ проективной геометрии $PG(5,2)$, можно поставить в соответствие двухуровневый фактор, который также обозначим через $(a_1, \dots, a_6)$. Совокупность всех таких 63 двухуровневых факторов образует ортогональную таблицу (64, 63, 2, 2), или регулярный план главных эффектов $2^{63}//64$.

Точки $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_v$ проективной геометрии $PG(5,2)$ $(v \le 6)$ называются линейно независимыми, если

$$Rg\|\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_v\| = v.$$

Обозначим точки (1, 0, …, 0), (0, 1, …, 0), …, (0, 0, …, 1) проективной геометрии $PG(5,2)$ через 1, 2, …, 6 соответственно. Эти точки являются линейно независимыми. Любая точка $(a_1, \dots, a_6)$ в $PG(5,2)$ может быть представлена в виде линейной комбинации точек 1, 2, …, 6:

$$(a_1, \dots, a_6) = \lambda_1(1,0,\dots,0) + \dots + \lambda_6(0,0,\dots,1), \tag{8.6.5}$$

где $\lambda_i = 0$ или 1 и не равны одновременно нулю.

Точку (8.6.5) будем обозначать через $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2} \dots 6^{\lambda_6}$. Например, точка (1, 1, 1, 0, 1, 0) будет обозначаться через 1235. В этих обозначениях все 63 точки $PG(5,2)$ изображены на рис. 8. Эти точки разбиты на девять подмножеств по семь точек (изображаемых на рис. 8 в виде 9 треугольников). Внутри каждого подмножества имеется только по три линейно независимых точки. Следовательно, семь точек подмножества лежат на двумерной плоскости (2-плоскости). В 2-плоскости семь точек лежат на семи прямых (1-плоскостях). На рис. 8 эти прямые, содержащие по три точки, в каждой 2-плоскости, изображены шестью отрезками прямых и одной окружностью.

Например, верхний левый треугольник на рис. 8 представляет собой 2-плоскость, содержащую семь точек: 5, 35, 3, 135, 15, 13 и 1. В качестве линейно независимых можно выбрать, например, точки 1, 3 и 5. Семь указанных точек лежат на семи прямых: 15-35-13, 13-3-1, 15-5-1, 13-135-5, 15-135-3, 1-135-35 и 3-5-35.

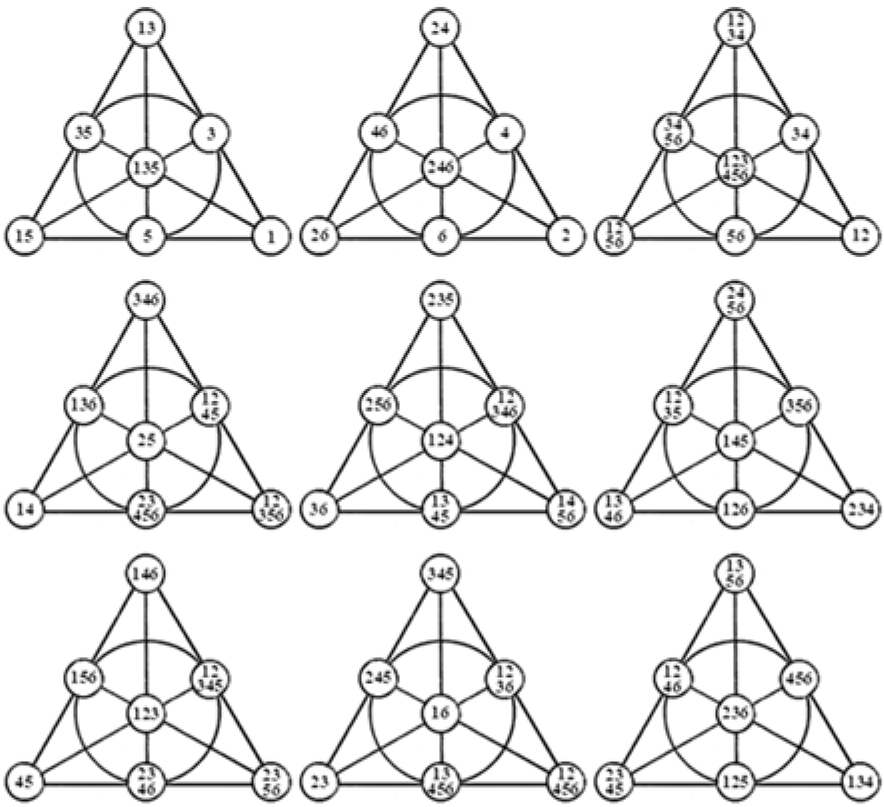


Рис. 8. Магическая конечная проективная геометрия $PG(5,2)$

В расположении точек $PG(5,2)$ на рис. 8 можно отметить выполнение одного дополнительного свойства. Рассмотрим любые три треугольника (2-плоскости), расположенные в одной и той же строке рис. 8. Тогда три одинаково расположенные на этих треугольниках точки лежат на одной прямой (в 1-плоскости). Например, в трех треугольниках второй строки центральные точки 25, 124 и 145 лежат на одной прямой. Будем называть такие прямые «горизонтальными». Аналогичным образом могут быть определены и «вертикальные» прямые. Однако они в построении планов участвовать не будут. Такое представление конечной проективной геометрии $PG(5,2)$ напоминает магический квадрат. Поэтому ее можно называть магической конечной проективной геометрией $PG(5,2)$.

Любые три точки (три двухуровневых фактора), лежащие на одной прямой в $PG\,(5,2)$, могут быть использованы для образования одного четырехуровневого фактора. Это следует из метода восстановления. Аналогичным образом, любые семь точек (семь двухуровневых факторов), лежащие в одной 2-плоскости, могут быть использованы для образования одного восьмиуровневого фактора.

С использованием магической конечной проективной геометрии $PG(5,2)$ (рис. 8) в работе [9] были построены новые регулярные планы главных эффектов $4^7 \text{x}\, 8^6//64$ и $4^{14}\,\text{x}\, 8^3//64$. План $4^7\text{x}\, 8^6//64$ можно построить, например, с помощью шести последних 2-плоскостей (из второй и третьей строк рис. 8) и семи горизонтальных прямых первой строки. Построенный таким образом план, представлен ниже в транспонированном виде:

```
0123103210320123321023012301321023013210321023011032012301231032
0231132002311320132002311320023120133102201331023102201331022013
0321210312303012123030120321210312303012032121030321210312303012
0202020213131313131313020202023131313120202020202020203131313131
0011110022333322223333220011110000111100223333222233332200111100
0213312013022031021331201302203120311302312002132031130231200213
0330122121123003300321121221033012210330300321122112300303301221
0011001122332233001100112233223377667766554455447766776655445544
0101232301012323767654547676545401012323010123237676545476765454
0110233223320110766754455445766776675445544576670110233223320110
0312657430215647120374652130475656473021657403124756213074651203
0536142763507241271436054172506314270536724163503605271450634172
0312746565741203564721303021475621305647475630217465031212036574
```

План $4^{14}\,\text{x}\, 8^3//64$ можно построить, например, с помощью трех последних 2-плоскостей (из третьей строки рис. 8) и 14 горизонтальных прямых первой и второй строк.

Общий список планов, которые могут быть построены с помощью магической конечной проективной геометрии $PG(5,2)$, дан в табл. 15.

Планы табл. 15 могут, очевидно, быть пополнены двухуровневыми факторами за счет точек $PG\,(5,2)$, не участвующих в построении четырехуровневых и восьмиуровневых факторов. Это приведет к построению планов 4^{21}, $2^8\,\text{x}\,4^{16}\,\text{x}\,8$, $2^4\,\text{x}\,4^{15}\,\text{x}\,8^2$, $4^{14}\,\text{x}\,8^3$, $2^8\,\text{x}\,4^9\,\text{x}\,8^4$, $2^4\,\text{x}\,4^8\,\text{x}\,8^5$, $4^7\,\text{x}\,8^6$, $2^8\,\text{x}\,4^2\,\text{x}\,8^7$, $2^4\,\text{x}\,4\,\text{x}\,8^8$.

Таблица 15

Построение планов 4^n x $8^m//64$ из магической конечной проективной геометрии *PG*(5, 2).

План	Построение четырехуровневых факторов	Построение восьмиуровневых факторов
4^{21}	21 горизонтальная прямая	
4^{16} x 8	14 горизонтальных прямых первых шести треугольников, любая прямая 7-го треугольника и любая прямая 8-го треугольника	9-й треугольник
4^{15} x 8^2	14 горизонтальных прямых первых шести треугольников и любая прямая 7-го треугольника	8 и 9-й треугольники
4^{14} x 8^3	14 горизонтальных прямых первых шести треугольников	7, 8 и 9-й треугольники
4^9 x 8^4	7 горизонтальных прямых 1, 2 и 3-го треугольников, любая прямая 4-го треугольника и любая прямая 5-го треугольника	6, 7, 8 и 9-й треугольники
4^8 x 8^5	7 горизонтальных прямых 1, 2 и 3-го треугольников и любая прямая 4-го треугольника	5, 6, 7, 8 и 9-й треугольники
4^7 x 8^6	7 горизонтальных прямых 1, 2 и 3-го треугольников	4, 5, 6, 7, 8 и 9-й треугольники
4^2 x 8^7	Любая прямая 1-го треугольника и любая прямая 2-го треугольника	Все треугольники, кроме 1 и 2-го
4 x 8^8	Любая прямая 1-го треугольника	Все треугольники, кроме 1-го
8^9		Все 9 треугольников

После опубликования работы [9] оставался открытым вопрос, каково максимальное значение *m* в геометрических планах главных эффектов вида 4^m x $8^n//64$ при заданном значении n. Эта проблема была окончательно решена И.Е. Богуславским. Далее, вплоть до конца §6, приводятся результаты его работы [11].

Лемма 8.6.1 [11]. Следующие два условия являются необходимыми для существования геометрического плана главных эффектов 4^m x $8^n//64$:

1. $7n + 3m \leq 63$;
2. $7n + 3m \neq 62; 7n + 3m \neq 61$.

Доказательство. Справедливость первого условия очевидна. Докажем справедливость второго условия.

Суммы всех точек любой прямой, любой 2-плоскости и самой $PG(5, 2)$

являются нулевыми. Поэтому сумма всех точек $PG(5,2)$, не занятых в построении четырех- и восьми-уровневых факторов плана 4^m x $8^n//64$, должна равняться нулевому вектору. А так как все точки $PG(5,2)$ – ненулевые и попарно различные, то равенство нулевому вектору не может достигаться, когда число незанятых точек равно 2 или 1. То есть, $7n + 3m \neq 62,\ 7n + 3m \neq 61$, что и требовалось.

В табл.16 сравниваются планы, построенные из магической проективной геометрии (левый столбец), и планы, несуществующие по лемме 8.6.1 (правый столбец).

Таблица 16
Планы, не существующие по лемме 8.6.1.

Планы, построенные из магической проективной геометрии	Планы, несуществующие по лемме 8.6.1
4^{21} x $8^0//64$	4^{22} x $8^0//64$
4^{16} x $8^1//64$	4^{18} x $8^1//64$
4^{15} x $8^2//64$	4^{16} x $8^2//64$
4^{14} x $8^3//64$	4^{15} x $8^3//64$
4^9 x $8^4//64$	4^{11} x $8^4//64$
4^8 x $8^5//64$	4^9 x $8^5//64$
4^7 x $8^6//64$	4^8 x $8^6//64$
4^2 x $8^7//64$	4^4 x $8^7//64$
4 x $8^8//64$	4^2 x $8^8//64$
$8^9//64$	4 x $8^9//64$
	$8^{10}//64$

Таким образом, остается открытым вопрос только о существовании планов 4^{17} x $8//64$, 4^{10} x $8^4//64$ и 4^3 x $8^7//64$.

Теорема 8.6.1 [11]**.** Геометрические планы главных эффектов 4^{17} x $8//64$ и 4^{10} x $8^4//64$ существуют.

Существование плана 4^{17} x $8//64$ подтверждается рассмотрением следующих подмножеств в $PG(5,2)$: одна 2-плоскость 1-2-12-3-13-23-123 и семнадцать прямых - 12456-24-156, 146-3456-135, 25-2356-36, 4-46-6, 246-35-23456, 1246-15-2456, 13456-256-1234, 1356-245-12346, 134-16-346, 1256-2346-1345, 234-1456-12356, 356-235-26, 1236-12345-456.

Существование плана 4^{10} x $8^4//64$ подтверждается рассмотрением следующих подмножеств в $PG\ (5,2)$: четыре 2-плоскости – 1246-136-234-2456-15-12345-356, 14-25-1245-1346-36-123456-2356, 1-2-12-3-13-23-123, 4-5-45-6-46-56-456 и десять прямых - 1236-345-12456, 134-16-346, 246-13456-1235, 145-125-24, 35-256-236, 23456-1234-156, 1456-235-12346, 2345-124-135, 2346-34-26, 1256-245-146.

Теорема 8.6.1 [11]. Геометрический план главных эффектов $4^3 \times 8^7//64$ не существует.

Доказательство этой теоремы, включающее шесть лемм, занимает в оригинале [11] пять объемных страниц и здесь воспроизводиться не будет.

В заключение параграфа перечислим геометрические планы главных эффектов вида $2^l \times 4^n \times 8^m//64$, которые обладают максимальным значением n для данного значения m (и максимальным значением l для данных значений n и m):

$4^{21}//64$
$2^5 \times 4^{17} \times 8//64$
$2^4 \times 4^{15} \times 8^2//64$
$4^{14} \times 8^3//64$
$2^5 \times 4^{10} \times 8^4//64$
$2^4 \times 4^8 \times 8^5//64$
$4^7 \times 8^6//64$
$2^8 \times 4^2 \times 8^7//64$
$2^4 \times 4 \times 8^8//64$
$8^9//64$

§ 7. Разбиение на блоки

Этот параграф начнем с примера, поясняющего, каким образом задача разбиения геометрического плана на ортогональные блоки может быть сведена к задаче построения компромиссных, вообще говоря, несимметричных регулярных планов.

Пусть требуется построить план в 16 опытах для восьми двухуровневых факторов $F_1, \dots, F_8$, который приводит к получению следующих попарно ортогональных эффектов: главные эффекты всех факторов и двухфакторные эффекты взаимодействия любой пары из первых четырех факторов $F_1, \dots$, F_4. Дополнительное ограничение состоит в том, что эксперимент из 16 опытов не может быть реализован в однородных условиях. Однородные условия могут быть выдержаны только в сериях из восьми опытов. Таким образом, планирование должно быть разбито на два блока. Можно потребовать разбиения на ортогональные блоки. Такая задача в соответствии с §14 главы 3 сводится к задаче построения геометрического компромиссного плана в 16 опытах для девяти двухуровневых факторов (дополнительный блоковый фактор обозначим через F_9), приводящего к получению попарно ортогональных главных эффектов всех факторов и двухфакторных эффектов взаимодействия любой пары факторов из $F_1, \dots$, F_4.

Как это следует из результатов §8 главы 6, такой план существует и факторы его задаются следующими вершинами связок параллельных плоскостей в $PG(4,\ 2)$: (1000), (0100), (0010), (0001), (1110), (1101), (1011), (0111), (1111). Если расположить опыты полученного плана таким образом, чтобы в первых восьми опытах блоковый фактор F_9 принимал значение 0, а во вторых восьми опытах – значение 1, то этот план будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c}\text{Первый блок}\\ \begin{array}{cccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \end{array}\\ \left\Vert\begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{array}\right\Vert\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Второй блок}\\ \begin{array}{cccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \end{array}\\ \left\Vert\begin{array}{cccccccc} 1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right\Vert\end{array}$$

Далее в этом параграфе мы приведем некоторые результаты, касающиеся разбиения на блоки геометрических факторных планов [12-17], и начнем с рассмотрения концепции Бозе (R.C.Bose) [17].

Рассмотрим полный факторный план, уровни m факторов которого будем представлять в виде элементов поля $GF\left(p^h\right)$. Тогда все точки полного факторного плана будут являться конечными точками проективного пространства $PG\left(m,\ p^h\right)$. Рассмотрим n независимых пучков в $PG\left(m,\ p^h\right)$:

$$P_i = P(a_{i1}, \dots, a_{im}) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{8.7.1}$$

Рассмотрим степени свободы, принадлежащие пучкам (8.7.1), как степени свободы, принадлежащие некоторым концептуальным факторам $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, уровни которых соответствуют различным плоскостям пучков. Пучок

$$P(\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{n1}, \dots, \lambda_1 a_{1m} + \dots + \lambda_n a_{nm})$$

обладает степенями свободы, соответствующими эффектам взаимодействия факторов $\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_r}$ принадлежащих множеству факторов $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ в том и только в том случае, если ненулевыми являются коэффициенты $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ и только они. Пусть $S_{i_1}, \dots, S_{i_n}$ – плоскости, принадлежащие пучкам (8.7.1). Эти плоскости пересекаются в $(m-n)$-плоскости $S_{i_1 \dots i_n}$. Так как каждый пучок имеет $s = p^h$ плоскостей, общее число из s^m опытов делится таким образом на s^n множеств вида $S_{i_1 \dots i_n}$. Очевидно, что степени свободы, соответствующие контрастам между этими множествами, совпадают со степенями свободы главных эффектов и эффектов взаимодействия факторов $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Последние в соответствии с теоремой 8.3.1 совпадают со степенями свободы, отвечающими главным эффектам s^n-уровневого блокового фактора F, полученного применением операции восстановления к факторам $\Phi_1, \dots, \Phi_n$.

Будем рассматривать теперь план **D**, одним из факторов которого является построенный нами блоковый фактор F, а другие факторы отождествляются с вершинами связок параллельных плоскостей в $PG(m, s)$.

Определение 8.7.1. Если какой-либо главный эффект или эффект взаимодействия для плана **D** представляется в виде линейной комбинации главных эффектов блокового фактора, то соответствующий главный эффект или эффект взаимодействия называется смешанным (с блоками). Остальные контрасты называются несмешанными (с блоками).

Аналогичным образом определяются смешанные и несмешанные с блоками степени свободы.

Нахождение смешанных с блоками контрастов (так же, как и нахождение связанных множеств для геометрических планов) важно с двух точек зрения. Во-первых, это нужно для определения той части полной факторной модели, для которой данный план невырожден. Во-вторых, это нужно для определения смещений при нахождении м.н.к.-оценок параметров этой модели (см. § 9 главы 6).

Вершины связок $P_1, \dots, P_n$ пересекаются в $(m-n-1)$-плоскости на бесконечности, которую обозначим через S. Тогда плоскости $S_{i_1}, \dots, S_{i_n}$, будучи расширены на бесконечность, проходят через S, так что $S_{i_1 \dots i_n}$ также проходит через S. Таким образом, все s^n расширенных на бесконечность плоскостей вида $S_{i_1 \dots i_n}$ образуют связку параллельных плоскостей с вершиной S.

Очевидно, что смешанными степенями свободы обладают те и только те пучки (8.7.1), вершина которых проходит через S. Таким образом, существует точно $(s^n-1)/(s-1)$ $(m-n)$-плоскостей на бесконечности, которые проходят через S. Эти плоскости соответствуют всем смешанным степеням свободы. Регулярный план в s^m опытах, разбитый на s^n ортогональных блоков размером s^{m-n} каждый, обозначим через (s^m, s^n). Такой план будет определяться $(m-n-1)$-плоскостью S на бесконечности.

Природа степеней свободы, которыми обладает каждая связка параллельных плоскостей в соответствии с теоремой 6.2.2, зависит от того, через какие вершины фундаментального симплекса проходит вершина этой связки. Поэтому тип плана (s^m, s^n) будет зависеть от того, каким образом проходит через фундаментальный симплекс плоскость S, определяющая этот план. Это позволяет перечислить возможные виды планов (s^m, s^n).

Рассмотрим, например, случай планов вида (s^3, s^2). Плоскость S в данном случае имеет размерность $m-n-1=0$. Поэтому каждому плану соответствует точка S в плоскости на бесконечности. Возможны три варианта расположения S относительно фундаментального симплекса: 1) точка S есть вершина фундаментального симплекса; 2) точка S лежит на ребре фундаментального симплекса, не совпадая ни с одной из его вершин; 3) точка S не лежит ни на одном из ребер фундаментального симплекса.

Для первого случая из $s+1$ прямых, проходящих через S, две совпадают со сторонами фундаментального симплекса. Остальные проходят через S, не совпадая со сторонами симплекса. Поэтому смешанными будут $s-1$ степеней свободы, принадлежащие каждому из главных эффектов некоторых двух факторов, и $(s-1)^2$ степеней свободы, принадлежащие эффектам взаимодействия этих факторов.

Для второго случая из $s+1$ прямых, проходящих через S, одна совпадает со стороной фундаментального симплекса, на которой лежит S. Другая проходит через противоположную вершину симплекса. Остальные не проходят через какую-либо его вершину. Поэтому смешанными будут $s-1$ степеней свободы, принадлежащие главным эффектам некоторого фактора, $s-1$ степеней свободы, принадлежащие эффектам взаимодействия двух других факторов, и $(s-1)^2$ степеней свободы, принадлежащие трехфакторным эффектам взаимодействия.

Для третьего случая из $s+1$ прямых, проходящих через S, три соединяют S с тремя вершинами фундаментального симплекса, остальные не проходят через его вершины. Поэтому смешанными будут по $s-1$ степеней свободы, принадлежащие всем двухфакторным эффектам взаимодействия и $(s-1)(s-2)$ степеней свободы, принадлежащие трехфакторным эффектам взаимодействия.

Перечисление различных классов планов $(s^4,\ s^3)$ и $(s^4,\ s^2)$ можно найти в работах [14, 17].

Интересен вопрос, какое максимальное число факторов можно выбрать так, чтобы остались несмешанными все их главные эффекты и эффекты взаимодействия вплоть до t-факторных включительно в плане вида $(s^m,\ s^n)$ при заданном размере блоков s^{m-n}.

$(m-n-1)$-плоскость на бесконечности S, определяющую разбиение на блоки (или смешанные степени свободы), можно ввести посредством задания $m-n$ независимых точек $L_1, \dots, L_{m-n}$ с координатами

$(0,\ a_{11}, \dots, a_{1m}),$
$(0,\ a_{21}, \dots, a_{2m}),$
. . . .
$\left(0,\ a_{m-n,1}, \dots, a_{m-n,m}\right).$

Уравнения любой $(m-t)$-грани фундаментального симплекса есть

$$\chi_0 = 0, \chi_{i_1} = 0, \chi_{i_2} = 0, \dots, \chi_{i_t} = 0. \qquad (8.7.2)$$

Любая $(m-2)$-плоскость на бесконечности, проходящая через грань (8.7.2), задается следующими уравнениями:

$$\chi_0 = 0, \quad \lambda_{i_1}\chi_{i_1} + \dots + \lambda_{i_t}\chi_{i_t} = 0. \qquad (8.7.3)$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы (8.7.3) проходила через S является выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{i_1} a_{1i_1} + \lambda_{i_2} a_{1i_2} + \cdots + \lambda_{i_t} a_{1i_t} = 0,\\
&\lambda_{i_1} a_{2i_1} + \lambda_{i_2} a_{2i_2} + \cdots + \lambda_{i_t} a_{2i_t} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_{i_1} a_{m-n,i_1} + \lambda_{i_2} a_{m-n,i_2} + \cdots + \lambda_{i_t} a_{m-n,i_t} = 0.
\end{aligned}$$

Это эквивалентно тому, что i_1-й, i_2-й, …, i_t-й столбцы матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-n,1} & a_{m-n,2} & \cdots & a_{m-n,m} \end{Vmatrix} \tag{8.7.4}$$

зависимы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.7.1 [17]. Максимальное число факторов в плане вида (s^m, s^n) при заданном размере блоков s^{m-n} при условии несмешивания всех главных эффектов и эффектов взаимодействия вплоть до t-факторных включительно равно максимальному числу столбцов в матрице (8.7.4) с элементами из $GF(s)$, никакие t столбцов которой не являются зависимыми.

Это же утверждение можно сформулировать на языке проективных геометрий в виде следующей теоремы.

Теорема 8.7.2 [17]. Максимальное число факторов в плане вида (s^m, s^n) при заданном размере блоков s^{m-n} при условии несмешивания всех главных эффектов и эффектов взаимодействия вплоть до t-факторных включительно равно максимальному числу точек конечной проективной геометрии $PG(m-n-1, s)$ таких, что никакие t из них не лежат в пространстве размерности не выше, чем $t-2$.

Это максимальное число в обозначениях §6 главы 6, записывается как $m_t(m-n, s)$ и соответствует полному $(m,\ t)$-множеству в $PG(m-n-1,\ s)$.

Литература

1. Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā*, **17**, 143–164.

2. Addelman, S. (1962). Orthogonal main effect plans for asymmetrical factorial experiments. *Technometrics*, **4**, 21–46.

3. Margolin, B.H. (1969). Resolution IV fractional factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **31**, 514–523.

4. Finney, D.J. (1969). *An Introduction to the Theory of Experimental Design*. Chicago: The University of Chicago Press.

5. Starks, T.H. (1964). A note on small orthogonal main effect plans for factorial experiments. *Technometrics*, **6**, 220–222.

6. Margolin, B.H. (1968). Orthogonal main effect 2^n3^m designs and two-factor interaction aliasing. *Technometrics*, **10**, 559–573.

7. Addelman, S. (1972). Recent developments in the design of factorial experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 103–111.

8. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. (1973). *Планирование эксперимента в условиях неоднородностей*. М., «Наука».

9. Бродский В.З. (1981). О планах Аддельмана-Кемпзорна и о планах 4^n x 8^m//64. *Вопросы кибернетики. Линейная и нелинейная параметризация в задачах планирования эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 52 -- 58.

10. Addelman, S. and Kempthorne, O. (1961). Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two. Ann. Math. Statist., **32**, 1167–1176.

11. Богуславский И.Е. (1989). Построение обобщенных геометрических факторных планов вида 8^n4^m//64. Заводская лаборатория, #5, 82–89.

12. Barnard, M.M. (1936). An enumeration of the confounded arrangements in the 2×2×2×… factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc., Suppl.*, **3**, 195–202.

13. Bose, R.C. (1947). The maximum number of factors that can be accommodated in a symmetrical factorial experiment, when interactions up to a given order are left unconfounded. *Proc. 34th Indian Sci. Congr.*, III, 6–7.

14. Bose, R.C. and Kishen, K. (1940). On the problem of confounding in the general symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **5**, 21–36.

15. Fisher, R.A. (1942). The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of group. *Ann. Eugenics*, **11**, 341–353.

16. Fisher, R.A. (1945).A system of confounding for factors with more than two alternatives giving completely orthogonal cubes and higher powers. *Ann. Eugenics*, **12**, 283–290.

17. Bose, R.C. (1947). Mathematical theory of the symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **8**, 107–166.

Глава 9. Нерегулярные планы главных эффектов

§ 1. Преобразования регулярных планов

Рассмотрим метод построения эффективных нерегулярных планов главных эффектов [1, 2], который является обобщением метода Аддельмана (S. Addelman) (см. §2 главы 8), когда результирующие факторы не обязательно ортогональны.

Пусть $\overline{\mathbf{D}}$ – невырожденный план главных эффектов в N опытах для n факторов $F_1, \dots, F_n$ с числами уровней $s_1, \dots, s_n$ соответственно. Обозначим через $\overline{\mathbf{F}}_i$ матрицу, состоящую из $s_i - 1$ линейно независимых векторов главных эффектов (со скалярным квадратом, равным N) фактора F_i для плана $\overline{\mathbf{D}}$. Независимо от вида факторной модели главных эффектов необходимое и достаточное условие того, чтобы план был невырожденным для данной модели, состоит в том, что матрица

$$\overline{\mathbf{X}} = \| \ \mathbf{I}, \quad \overline{\mathbf{F}}_1, \dots, \overline{\mathbf{F}}_n \ \|$$

есть матрица полного ранга (§12 главы 3) или

$$\det(\overline{\mathbf{X}}^T\overline{\mathbf{X}}) \neq 0. \tag{9.1.1}$$

Рассмотрим следующий способ получения нового плана $\mathbf{D}$ главных эффектов из плана $\overline{\mathbf{D}}$. Вместо фактора F_i (с числом уровней s_i) в плане $\overline{\mathbf{D}}$ будем рассматривать факторы F_i^1, ... , $F_i^{m_i}$ (с числами уровней $s_i^{(1)}$, ... , $s_i^{(m_i)}$ соответственно) в плане $\mathbf{D}$ такие, что

$$\left(s_i^{(1)} - 1\right) + \cdots + \left(s_i^{(m_i)} - 1\right) = S_i - 1 \leq s_i - 1 \tag{9.1.2}$$

и для одинаковых уровней F_i каждый из факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ имеет равные уровни. Таким образом, в результате указанной замены фактора F_i каждому его уровню ставится в соответствие строка вспомогательного плана $\mathbf{D}_i$:

$$\begin{array}{c} F_i \\ \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ s_i - 1 \end{array} \right\| \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_i^1 & \dots & F_i^{m_i} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} F_i^1(0) & \dots & F_i^{m_i}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_i^1(s_i - 1) & \dots & F_i^{m_i}(s_i - 1) \end{array} \right\| \end{array} = \mathbf{D}_i.$$

Таким образом, главный эффект любого из факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ для плана $\mathbf{D}$ есть главный эффект фактора F_i для плана $\overline{\mathbf{D}}$.

Пусть $\mathbf{D}^f$ – полный план в $N^f = s_1^{(1)} \dots s_1^{(m_1)} \dots s_n^{(1)} \dots s_n^{(m_n)}$ опытах для факторов $F_1^1, \dots, F_1^{m_1}, \dots, F_n^1, \dots, F_n^{m_n}$; $\mathbf{D}_i^f$ – полный план в $n_i^f = s_i^{(1)} \dots s_i^{(m_i)}$ опытах для факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$. Таким образом, $N^f = \prod_{i=1}^n n_i^f$.

Обозначим через $\mathbf{F}_i^j$ матрицу главных эффектов фактора F_i^j плана $\mathbf{D}$. Обозначим также через $\mathbf{x}_i^T = \mathbf{x}_i^T\left(j_i^1, \dots, j_i^{m_i}\right)$ строку матрицы

$$\mathbf{F}_i = \| \ \mathbf{F}_i^1, \dots, \mathbf{F}_i^{m_i} \ \|,$$

соответствующую уровням $j_i^1, \dots, j_i^{m_i}$ факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ соответственно. Каждой точке плана $\mathbf{D}^f$ с уровнями $j_1^1, \dots, j_1^{m_1}, \dots, j_n^1, \dots, j_n^{m_n}$ факторов $F_1^1, \dots, F_1^{m_1}, \dots, F_n^1, \dots, F_n^{m_n}$ соответственно отвечает вектор

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T\left(j_1^1, \dots, j_1^{m_1}, \dots, j_n^1, \dots, j_n^{m_n}\right) = (1, \mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T).$$

Независимо от типа модели главных эффектов для невырожденного плана $\mathbf{D}$ дисперсия σ_x^2 оценки регрессионной функции в точке $\left(j_1^1, \dots, j_1^{m_1}, \dots, j_n^1, \dots, j_n^{m_n}\right)$ плана $\mathbf{D}^f$ вследствие результатов §12 главы 3 есть

$$\sigma_x^2 = \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \sigma^2, \tag{9.1.3}$$

где $\mathbf{X} = \| \ \mathbf{I}, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n \ \|$.

Легко показать, что для $s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(m_i)}$, удовлетворяющих условию $S_i = s_i$, уровни $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ можно разместить таким образом, чтобы

$$\operatorname{Rg} \mathbf{F}_i = S_i - 1. \tag{9.1.4}$$

Действительно, следующее преобразование

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ s_i - 2 \\ s_i - 1 \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\| = \mathbf{D}'_i \tag{9.1.5}$$

показывает, как можно разместить уровни $s_i - 1$ двухуровневых факторов $F_i^1, \dots, F_i^{s_i - 1}$ так, чтобы выполнялось условие (9.1.4). Если среди факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ есть фактор с l уровнями, то следует объединить любые $l - 1$ столбцов для двухуровневых факторов из $\mathbf{D}'_i$. Например, размещение для трехуровневого фактора получаем при помощи объединения двух столбцов:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Если $S_i = s_i - q \quad (q > 0)$, следует использовать матрицу $\mathbf{D}'_i$ с q вычеркнутыми столбцами.

При выполнении условия (9.1.4) матрицы $\bar{\mathbf{F}}_i$ и $\mathbf{F}_i$ связаны невырожденным линейным преобразованием. Поэтому план $\mathbf{D}$ есть так же, как и план $\bar{\mathbf{D}}$, план главных эффектов, то есть $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ невырождена.

Преобразование (9.1.5) (и аналогичные ему) хотя и приводит всегда к невырожденному плану, не является, вообще говоря, наилучшим. Однако можно найти такие преобразования, чтобы получающиеся при этом планы обладали некоторыми оптимальными свойствами.

Если $\bar{\mathbf{D}}$ – регулярный план главных эффектов, то любой столбец $\bar{\mathbf{F}}_i$ ортогонален любому столбцу $\bar{\mathbf{F}}_j$ и, следовательно, любой столбец $\mathbf{F}_i$ ортогонален любому столбцу $\mathbf{F}_j$. Поэтому матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} N & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_1^T\mathbf{F}_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{F}_n^T\mathbf{F}_n \end{Vmatrix}.$$

Вследствие соотношения (9.1.3)

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{x}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}\sigma^2 = \left\{\frac{1}{N} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^T\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1}\mathbf{x}_i\right\}\sigma^2.$$

Средняя дисперсия по точкам полного плана $\mathbf{D}^f$ есть

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \frac{\sigma^2}{N^f}\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}^f}\left\{\frac{1}{N} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^T\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1}\mathbf{x}_i\right\} \\ &= \sigma^2\left\{\frac{1}{N} + \frac{1}{N^f}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}^f}\mathbf{x}_i^T\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1}\mathbf{x}_i\right\} \\ &= \sigma^2\left\{\frac{1}{N} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N^f}\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}^f}\mathbf{x}_i^T\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1}\mathbf{x}_i\right\}.\end{aligned}$$

Из результатов §4 главы 4 следует, что

$$\sigma_a^2 = \sigma^2\left\{\frac{1}{N} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{S_i-1} c_{jj}^i\right\}, \tag{9.1.6}$$

где $\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1} = \left\{c_{jl}^i\right\}$.

Пусть $\left\{\bar{c}_{jl}^i\right\}\sigma^2$ – ковариационная матрица плана $\mathbf{D}_i$ для модели главных эффектов. Тогда, очевидно, $c_{jl}^i\, {}^{N}\!/_{S_i} = \bar{c}_{jl}^i$.

Если план $\overline{\mathbf{D}}$ есть также и равномерный, то величина

$$\begin{aligned}\sigma_{ia}^2 &= \frac{\sigma^2}{s_i}\left\{1+\frac{N}{n_i^f}\sum\nolimits_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}^f}\mathbf{x}_i^T\left(\mathbf{F}_i^T\mathbf{F}_i\right)^{-1}\mathbf{x}_i\right\}\\ &= \sigma^2\left\{\frac{1}{s_i}+\frac{N}{s_i}\sum\nolimits_{j=1}^{S_i-1}c_{jj}^i\right\} = \sigma^2\sum\nolimits_{j=1}^{S_i}\bar{c}_{jj}^i\end{aligned} \tag{9.1.7}$$

есть средняя (по точкам $\mathbf{D}_i^f$) дисперсия оценки регрессионной функции для плана $\mathbf{D}_i$. Из равенств (9.1.6) и (9.1.7) следует, что

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{N}\left(1-n+\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ia}^2 s_i}{\sigma^2}\right).$$

Поэтому минимум σ_a^2 достигается тогда и только тогда, когда обращаются в минимум σ_{ia}^2 для всех $i=1,\dots,n$. Таким образом, задача получения оптимального (в смысле минимизации σ_a^2) плана $\mathbf{D}$ из плана $\overline{\mathbf{D}}$ эквивалентна задаче получения оптимальных (в смысле того же критерия) планов $\mathbf{D}_i$.

Аналогично может быть показано, что задача получения D-оптимального плана $\mathbf{D}$ сводится к задаче получения D-оптимальных планов $\mathbf{D}_i$.

Обозначим через σ_n^2 и σ_{in}^2 нормированные на одно наблюдение и на один параметр дисперсии σ_a^2 и σ_{ia}^2 соответственно:

$$\sigma_n^2 = \sigma_a^2\frac{N}{k};\;\; \sigma_{in}^2 = \sigma_{ia}^2\frac{s_i}{S_i}$$

(k – число параметров в модели). Тогда, используя обозначение $A_i = \sum_{j=1}^{S_i-1}c_{jj}^i$, вследствие соотношений (9.1.6) и (9.1.7) получим

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{k}\left(1+N\sum\nolimits_{i=1}^{n}A_i\right),\quad \sigma_{in}^2 = \frac{\sigma^2}{S_i}(1+NA_i).$$

Функцию эффективности, связанную с критерием средней дисперсии, часто представляют в виде отношения дисперсии ошибки эксперимента и средней дисперсии по точкам полного плана, нормированной на одно наблюдение и на один параметр. Поэтому функция эффективности (эффективность) плана $\mathbf{D}$

$$\varphi = \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} = \frac{k}{1+\sum_{i=1}^{n}NA_i}.$$

А эффективность плана $\mathbf{D}_i$ (или преобразования $\mathbf{D}_i$)

$$\varphi_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_{in}^2} = \frac{S_i}{1+NA_i}.$$

Для тождественного преобразования, очевидно, $\varphi_i = 1$. Таким образом, эффективность плана **D** может быть выражена через эффективности каждого из планов $\mathbf{D}_i$, соответствующих плану **D**:

$$\varphi = k/(1 - n + \sum_{i=1}^{n} S_i/\varphi_i)\,. \qquad (9.1.8)$$

Из результатов §5 главы 4 следует, что эффективность плана $\varphi \leq 1$.

Задача получения оптимальных преобразований (планов $\mathbf{D}_i$) может легко решаться численно для важных в практическом отношении случаев прямым перебором [2]. Оптимальные (в смысле минимизации средней дисперсии) преобразования для факторов от трехуровневых до семиуровневых представлены в каталоге (заключительной секции книги) в следующей форме. Раздел III содержит матрицы базисных преобразований. Каждое базисное преобразование сопровождается несколькими информационными строками, показывающими, как можно получить оптимальное преобразование из базисного.

Пример 9.1.1. Рассмотрим базисное преобразование №11 каталога:

0 0 0
0 1 1
1 1 0
1 0 1
2 0 0
3 1 1

Это базисное преобразование допускает построение трех оптимальных преобразований: $4 \times 2^2//6,\ 4 \times 2//6,\ 4//6$. Первое оптимальное преобразование шестиуровневого фактора в два двухуровневых фактора и один четырехуровневый фактор содержит все три столбца базисного преобразования. Его эффективность равна 67%. Второе преобразование содержит первые два столбца базисного преобразования. Его эффективность равна 74%. Третье преобразование состоит из первого столбца базисного преобразования. Его эффективность равна 89%.

Преобразования 14а, 15а и 16а находились методом проекций, который заключается в следующем. Поиск оптимального преобразования 14а ($2^6//7$) производился среди матриц, первые пять столбцов которых совпадают со столбцами матрицы преобразования 14б ($2^5//7$). Преобразования 15а ($3 \times 2^4//7$) и 16а ($3^2 \times 2^2//7$) получались из преобразований 15б ($3 \times 2^3//7$) и 16б ($3^3 \times 2//7$) соответственно.

В приложении 2 будет представлен более широкий класс преобразований, включающий помимо главных эффектов также эффекты взаимодействий.

§ 2. Неполноблочные планы

Часто большое число опытов возникает из-за того, что два или более факторов $F_1, \dots, F_r$ (с $s_1, \dots, s_r$ уровнями соответственно) образуют большое число различных комбинаций уровней. Когда все эти эксперименты не могут быть проведены в однородных условиях, может спасти предположение, что эффекты взаимодействия высоких порядков отсутствуют. Тогда можно разбить планирование на блоки так, чтобы межблоковые эффекты были смешаны с этими эффектами взаимодействия высоких порядков (§7 главы 8).

Если нельзя пожертвовать никакими эффектами взаимодействия или большое число опытов возникает из-за того, что исследуется один фактор F с большим числом уровней s, приходим к задаче построения неполноблочных планов. В действительности, как легко понять, эти два случая эквивалентны, если $s = s_1 \dots s_r$. Поэтому далее мы будем считать, что изучается влияния одного фактора с большим числом уровней. Модель в этом случае имеет вид

$$Ey = \beta_0 + \beta_1^{(0)} x_1^{(0)} + \dots + \beta_1^{(s_1-1)} x_1^{(s_1-1)}$$
$$+\beta_2^{(0)} x_2^{(0)} + \dots + \beta_2^{(s_2-1)} x_2^{(s_2-1)} \qquad (9.2.1)$$

с ограничениями

$$\sum_{i=1}^{s_j-1} \beta_j^{(i)} = 0 \quad (j = 1, 2), \qquad (9.2.2)$$

где $\beta_1^{(i)}$ – эффекты уровней блокового фактора; $\beta_2^{(i)}$ – эффекты уровней основного фактора.

Таким образом, модель (9.2.1) относится к модели главных эффектов. А неполноблочные планы есть факторные планы главных эффектов. Модель главных эффектов получится также, если рассматривать несколько систем блоков. Используемые при этом планы носят название многомерных.

Неполноблочные планы впервые были использованы для задач планирования эксперимента Йейтсом (F. Yates) [3, 4], хотя с комбинаторной точки зрения они рассматривались еще в XIX столетии. На русском языке есть обзор Широковой [5] и книга Марковой [6], относящиеся к некоторым аспектам построения и обработки неполноблочных планов.

Не будем здесь уделять много внимания этому вопросу, традиционно излагаемому отдельно от проблемы факторного планирования. Введем лишь понятие сбалансированного неполноблочного плана (BIB-плана), которое будет использоваться в следующей главе.

Будем говорить об инцидентной структуре, если для множества V имеется множество B непустых подмножеств множества V.

Определение 9.2.1. Пусть множество V содержит v различных элементов $a_1, \dots, a_v$; пусть B – множество подмножеств множества

V: $B_1, \dots, B_b$ (называемых блоками). Тогда инцидентная структура, порождаемая B и V, называется блочным планом.

В этом случае, таким образом, установлено отношение инцидентности $a_i \in B_j$, означающее, что элемент a_i множества V содержится в блоке B_j.

Определение 9.2.2. Матрица

$$\begin{Vmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1\mathrm{b}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{v1} & \cdots & n_{v\mathrm{b}} \end{Vmatrix}$$

называется матрицей инцидентности блочного плана, если n_{ij} есть число элементов a_i, содержащихся в блоке B_j.

Определение 9.2.3. Блочный план называется сбалансированным неполноблочным планом с параметрами $v,\ b,\ k,\ r,\ \lambda$, или BIB-планом $(v,\ b,\ k,\ r,\ \lambda)$, если число блоков плана равно b, каждый блок содержит k элементов, число элементов в V равно v, каждый элемент из V встречается в r блоках и любая пара элементов из V содержится в λ блоках.

Таким образом, матрица инцидентности BIB-плана есть матрица из 0 и 1 и

$$n_{ij} = \begin{cases} = 1, & \text{если} \quad a_i \in B_j, \\ = 0, & \text{если} \quad a_i \notin B_j. \end{cases}$$

Пример 9.2.1. BIB-план (6, 10, 3, 5, 2) может быть задан следующими блоками:

$$B_1 = (1,2,3);\ \ B_2 = (1,2,4);\ \ B_3 = (1,3,5);\ \ B_4 = (2,4,5);$$
$$B_5 = (3,4,5);\ \ B_6 = (2,3,6);\ \ B_7 = (1,4,6);\ \ B_8 = (3,4,6);$$
$$B_9 = (1,5,6);\ \ B_{10} = (2,5,6).$$

Матрица инцидентности этого плана будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из определения BIB-плана следует, что для матрицы инцидентности плана $(v,\ b,\ k,\ r,\ \lambda)$ число единиц в каждом столбце равно k, число единиц в каждой строке равно r и любые две строки содержат λ единиц в одинаковых столбцах.

Два тривиальных необходимых условия существования BIB-планов $(v,\ b,\ k,\ r,\ \lambda)$:

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1). \tag{9.2.3}$$

Литература

1. Margolin, B.H. (1972). Non-orthogonal main effect designs for asymmetrical factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **34**, 431–440.

2. Бродский В.З., Кузнецов В.С. (1973). К вопросу о построении факторных планов главных эффектов. *Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по планированию и автоматизации эксперимента в научных исследованиях, часть I.* М., 36–38.

3. Yates, F. (1936). Incomplete randomized blocks. *Ann. Eugenics*, **8**, 121–140.

4. Yates, F. (1936). A new method of arranging variety trials involving a large number of varieties. *J. Agric. Sci.*, **26**, 424–455.

5. Широкова, С.А. (1968). Блок-схемы. *Усп. мат. наук*, **23,** 51–98.

6. Маркова Е. В. (1970). *Неполноблочные планы*. Изд-во МГУ, 1970.

Глава 10. Двухуровневые нерегулярные планы главных эффектов

§ 1. Связь с планами взвешивания

Будем рассматривать задачу построения эффективных нерегулярных (вообще говоря) двухуровневых факторных планов главных эффектов для A^{Ω}-модели истинных эффектов для количественных факторов. Эта задача, очевидно, эквивалентна задаче построения планов первого порядка, то есть невырожденных планов для модели

$$Ey = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m \tag{10.1.1}$$

на множестве

$$x_i = \pm 1. \tag{10.1.2}$$

Эта задача имеет тесную связь с проблемой взвешивания, рассмотренной Хотеллингом (H. Hotelling) [1], по оцениванию весов m предметов посредством определенного количества взвешиваний. Различают две постановки задачи о взвешивании: взвешивание на двухчашечных весах – взвешивание типа 2 и взвешивание на одночашечных весах – взвешивание типа 1.

Взвешивание типа 2 соответствует матрице плана $\mathbf{D} = \{d_{iu}\}$ с элементами – 1, 0 и +1. При этом u-я строка $\mathbf{D}$ отвечает u-му взвешиванию на весах, а i-й столбец отвечает i-му предмету. $d_{iu} = -1$, если в u-м взвешивании i-й предмет положен на левую чашку весов; $d_{iu} = 0$, если i-й предмет не участвует в u-м взвешивании; $d_{iu} = +1$, если i-й предмет в u-м взвешивании положен на правую чашку весов.

Для взвешивания типа 2 возможны два вида модели: с неизвестным свободным членом, то есть модель 10.1.1, и с известным свободным членом, который в последнем случае без ограничения общности можно положить равным нулю, то есть модель

$$Ey = b_1 x_1 + \cdots + b_m x_m. \tag{10.1.3}$$

Модель (10.1.3) не является факторной. Однако будем рассматривать эту модель из-за того, что результаты по построению планов для моделей (10.1.3) и (10.1.1) взаимосвязаны.

Неизвестный свободный член в модели соответствует взвешиванию на весах с «невыверенным нулем» или со смещением. Известный свободный член в модели соответствует взвешиванию на весах с «выверенным нулем» или без смещения. В последнем случае известно, что показание весов, когда ни на одной чашке нет предметов, равно нулю.

План взвешивания типа 2 – факторный план в том случае, когда матрица плана взвешивания не содержит нулей. Построением именно таких эффективных планов взвешивания будем заниматься в случае двухчашечных весов. При этом будем получать эффективные планы для моделей (10.1.1) или (10.1.3) не только на множестве (10.1.2), но и на множестве

$$x_i = -1, 0, +1. \tag{10.1.4}$$

План взвешивания типа 1 соответствует матрице плана $\mathbf{D} = \{d_{iu}\}$ с элементами –1 и +1: $d_{iu} = -1$ или $d_{iu} = +1$, если i-й предмет в u-м взвешивании соответственно не участвует или участвует во взвешивании. Таким образом, задача взвешивания типа 1 эквивалентна задаче построения факторных планов для модели (10.1.1) на множестве (10.1.2). Здесь коэффициент b_i $(i = 1, \ldots, m)$ модели (10.1.1) равен половине веса i-го предмета в отличие от взвешивания типа 2, где коэффициент равен весу предмета.

Для взвешивания типа 1 также возможны два случая. Первый случай – это планы на множестве (10.1.2) для модели (10.1.1) без ограничений. Второй случай – это планы на множестве (10.1.2) для модели (10.1.1) с ограничением $b_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i + c$. Второй случай соответствует известному показанию одночашечных весов (это показание, очевидно, есть c), когда ни один из предметов не участвует во взвешивании. Без ограничения общности можно положить $c = 0$. Назовем первый и второй случаи соответственно случаям со смещением и без смещения. Второй случай также назовем моделью с закрепленной точкой.

Очевидно, что для любого плана $\mathbf{D}_1$ на множестве (10.1.2) и модели (10.1.1) матрица коэффициентов $\mathbf{X} = \| \ \mathbf{I}, \ \ \mathbf{D}_1 \ \|$, а для плана $\mathbf{D}$ на множестве (10.1.2) и модели (10.1.3) матрица коэффициентов $\mathbf{X} = \mathbf{D}$. Умножение в плане $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3) любой строки на –1 не меняет матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Поэтому без ограничения общности по отношению к критериям оптимальности, зависящим только от вида $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, можно считать, что соответствующими умножениями на –1 план $\mathbf{D}$ приведен к виду $\mathbf{X} = \| \ \mathbf{I}, \ \ \mathbf{D}_I \ \|$.

Рассмотрим теперь план $\mathbf{D}_I$ для модели

$$Ey = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_{m-1} x_{m-1}. \tag{10.1.5}$$

Очевидно, что матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}_I$ для модели (10.1.5) есть $\| \ \mathbf{I}, \ \ \mathbf{D}_I \ \|$, то есть совпадает с матрицей коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3). Поэтому, если план $\mathbf{D}$ обладает оптимальными свойствами по отношению к модели (10.1.3), то аналогичными свойствами будет обладать план $\mathbf{D}_I$ по отношению к модели (10.1.5). В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 10.1.1. Если план $\mathbf{D}$ на множестве (10.1.2) есть *A*-, *D*-, *E*-оптимальный план с *N* наблюдениями для модели (10.1.3), то план $\mathbf{D}_I$ на множестве (10.1.2) есть соответственно *A*-, *D*-, *E*-оптимальный план с *N* наблюдениями для модели (10.1.5).

Аналогичный результат справедлив, если на множество рассматриваемых планов наложены дополнительные ограничения, например, ограничения на вид матрицы моментов, насыщенности и т. п.

В §2-6 будут рассмотрены *A*-, *D*-, *E*-оптимальные планы взвешивания типа 2 для модели без смещения (10.1.3). Поскольку эти планы будут сосредоточены на множестве (10.1.2), они будут *A*-, *D*-, *E*-оптимальными планами взвешивания типа 2 со смещением для модели (10.1.1) и, следовательно, *A*-, *D*-, *E*-оптимальными планами взвешивания типа 1 со смещением для модели (10.1.1) без ограничений. В §7 будет рассмотрена модель с закрепленной точкой, отвечающая планам взвешивания типа 1 без смещения.

§ 2. Планы $[m,\ v,\ \lambda]$

Ближайшая наша цель – отыскание эффективных планов взвешивания типа 2 для модели (10.1.3). Будем искать планы, сосредоточенные на множестве (10.1.2), которые были бы эффективны по отношению к множеству (10.1.4). Эффективность планов взвешивания будем рассматривать с точки зрения критериев *A*-, *D*-, *E*-оптимальности, которые применительно к планам взвешивания носят названия соответственно критериев Кишена, Муда и Эренфельда.

Из результатов §4 главы 7 следует, что *A*-, *D*-, *E*-оптимальные планы могут быть легко построены в том случае, когда число наблюдений *N* есть число Адамара, то есть когда существует матрица Адамара порядка *N*. При $2 < N < 668$ любое кратное четырем число есть число Адамара. Поэтому интерес представляет вопрос построения эффективных насыщенных планов в случае, когда $N = m \neq 4l$.

Будем искать планы на множестве планов с матрицей моментов

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{matrix} \right\| = (r-\lambda)\mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{J}_m, \qquad (10.2.1)$$

где $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{J}_m$ – соответственно единичная матрица и матрица из 1 порядка m. Такие планы обозначим через $[m,\ v,\ \lambda]$, где v – число нулей в каждом столбце. Особый интерес представляют планы вида $[m,\ 0,\ \lambda]$.

Обращение (10.2.1) приводит к равенству

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = (r^* - \lambda^*)\mathbf{E}_m + \lambda^*\mathbf{J}_m, \tag{10.2.2}$$

где

$$r^* = \frac{r + \lambda(m-2)}{(r-\lambda)[r + \lambda(m-1)]}; \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{(r-\lambda)[r + \lambda(m-1)]}.$$

Из равенства (10.2.2) следует, что план $[m,\ v,\ \lambda]$ приводит к получению оценок коэффициентов модели с равными дисперсиями и равными ковариациями.

Запишем функции эффективности для планов, удовлетворяющих выражению (10.2.1). Эффективность по Кишену [2] можно записать следующим образом:

$$\varphi_A(r,\lambda) = \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} c_{ii}\right)^{-1} = \frac{(r-\lambda)[r+\lambda(m-1)]}{m[r+\lambda(m-2)]}, \tag{10.2.3}$$

где $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \{c_{ij}\}$.

Эффективность по Муду [3] можно записать следующим образом:

$$\varphi_D(r,\lambda) = \det(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = (\det\mathbf{X})^2$$
$$= (r-\lambda)^{m-1}[r + \lambda(m-1)]. \tag{10.2.4}$$

Поскольку

$$(\det\mathbf{X})^2 > 0,$$

получим, что

$$r > \lambda, \quad r + \lambda(m-1) > 0. \tag{10.2.5}$$

Неравенства (10.2.5) справедливы только при значениях $\lambda = -1$ или $\lambda \geq 0$. В случае $\lambda = -1$ необходимо $m = r$.

Эффективность по Эренфельду [4] записывается следующим образом:

$$\varphi_E(r,\ \lambda) = {}^{z_{\min}}\!/_{m} = \begin{cases} \frac{r-\lambda}{m},\ \text{если}\ r > \lambda \geq 0, \\ \frac{1}{m},\ \text{если}\ \lambda = -1,\ r = m, \end{cases} \tag{10.2.6}$$

где $z_{\min}$ – минимальный характеристический корень матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.

Действительно, решение уравнения

$$\det(\mathbf{X}^T\mathbf{X} - z\mathbf{E}_m) = 0,$$

или

$$\det[(r - \lambda - z)\mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{J}_m] = 0,$$

относительно z приводит при $\lambda \neq 0$ к корню $r - \lambda$ кратности $m - 1$ и корню $r + \lambda(m-1)$ кратности 1. При $\lambda = 0$ имеем единственный корень, равный r, с кратностью m. Из двух различных корней минимальным является $r - \lambda$, за исключением частного случая, когда $\lambda = -1$ и $r = m$ (тогда $z_{\min} = 1$).

§ 3. Теоремы существования планов $[m,\ v,\ \lambda]$

Теорема 10.3.1 [5]. Необходимое условие существования плана вида $[m,\ v,\ \lambda]$ состоит в том, что

$$m - v + (m-1)\lambda \tag{10.3.1}$$

есть точный квадрат.

Доказательство. Из соотношения (10.2.4) следует, что

$$\det \mathbf{X} = \pm(\det \mathbf{X}^T\mathbf{X})^{1/2}$$
$$= \pm(m - v - \lambda)^{(m-1)/2}[m - v + (m-1)\lambda]^{1/2}.$$

Так как $\det \mathbf{X}$ – действительное целое число, то (10.3.1) есть точный квадрат, что и требовалось доказать.

Из теоремы 10.3.1 сразу следует несуществование некоторых видов планов $[m,\ v,\ \lambda]$. Рассмотрим нечетные значения m. Тогда случаи, когда план $[m,\ v,\ \lambda]$ не существует, таковы:

1. $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$;
2. $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$;
3. $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \lambda \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$;
4. $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \lambda \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$;
5. $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \lambda \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$;
6. $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \mathrm{v} \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\quad \lambda \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Для случаев 1, 3 и 5 выражение (10.3.1) удовлетворяет сравнению

$$m - v + (m-1)\lambda \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$$

и потому не может быть точным квадратом.

Для случаев 2, 4 и 6 выражение (10.3.1) удовлетворяет сравнению

$$m - v + (m-1)\lambda \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$$

и также не может быть точным квадратом.

Частный случай теоремы 10.3.1 – следующее утверждение.

Теорема 10.3.2 [6]. Необходимое условие существования плана $[m,\ 0,\ 1]$ состоит в том, что

$$m = (d^2 + 1)/2, \tag{10.3.2}$$

где d – нечетное целое.

Аналогично теореме 10.3.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 10.3.3 [7]. Необходимое условие существования плана $[m,\ 0,\ 2]$ состоит в том, что

$$m = 1/3\left[4 + (3d^2 + 4)^{1/2}\right], \tag{10.3.3}$$

где d – целое.

Теорема 10.3.4 [6]. Если $v=0$ или $v=1$, то для существования $[m,\ v,\ \lambda]$ необходимо, чтобы $m-\lambda$ было четным.

Доказательство. Для случая $v=0$ доказательство очевидно. Докажем утверждение теоремы в случае, когда $v=1$.

Пусть $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_j$ – любые два вектор-столбца матрицы $\mathbf{X}$. $\boldsymbol{\xi}_i^T\boldsymbol{\xi}_j$ имеет m слагаемых (+1, 0 и –1). Так как $\boldsymbol{\xi}_i^T\boldsymbol{\xi}_j=\lambda \quad (i\neq j)$, то можно выделить $m-\lambda$ членов, которые в сумме дают нуль. Предположим, что $m-\lambda$ нечетно. Тогда среди выделенных $m-\lambda$ членов будет нуль. Причем этот нуль единственный. Для этого необходимо, чтобы нули в столбцах $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_j$ находились в одной и той же строке. Так как это справедливо для любой пары столбцов матрицы $\mathbf{X}$, получим строку из нулей, что приводит к вырожденной матрице $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Таким образом, теорема доказана.

В работе [5] частными алгебраическими методами получены также другие теоремы существования планов $[m,\ v,\ \lambda]$. Из этих результатов, а также из теоремы 10.3.1 вытекает, в частности, следующие два утверждения, которые приведем здесь без доказательства.

Теорема 10.3.5 [5]. 1. Пусть $m\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$, тогда не существуют планы $[m,\ v,\ \lambda]$ при $-1<v+\lambda<3$ и [15, 0, 3]. 2. Пусть $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, тогда не существуют планы $[m,\ v,\ \lambda]$ при $v+\lambda<5$, кроме случая $v=0, \lambda=1$.

Теорема 10.3.6 [5]. Необходимое условие существования планов $[m,\ 0,\ \lambda]$ $(m\neq 2)$ состоит в том, что

$$m-\lambda\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4). \tag{10.3.4}$$

Очевидно, что необходимое условие (7.4.3) существования матриц Адамара есть частный случай условия (10.3.4).

§ 4. Достаточные условия оптимальности планов $[m,\ v,\ \lambda]$

Лемма 10.4.1 [7]. При $r>\lambda\geq 0$ функция $\varphi_D(r,\lambda)$ (10.2.4) при фиксированном значении λ монотонно возрастает по r и при фиксированном значении r монотонно убывает по λ.

Доказательство этой монотонности может быть проверено непосредственным дифференцированием $\varphi_D(r,\lambda)$ по r и λ.

Теорема 10.4.1 [6, 7]. Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{D}$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3), m нечетно, и

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}=(m-1)\mathbf{E}_m+\mathbf{J}_m.$$

Тогда $\mathbf{D}$ есть A-, D-, E-оптимальный план типа $[m,\ 0,\ 1]$ на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Сначала докажем теорему по отношению к функции эффективности Кишена (10.2.3). При $r>\lambda\geq 0$ или $r=m,\ \lambda=-1$ справедливо равенство

$$\varphi_A(m,1)-\varphi_A(r,\lambda)=\frac{2m-1}{2m}-\frac{(r-\lambda)[r+\lambda(m-1)]}{m[r+\lambda(m-2)]}$$

$$=\frac{(m-1)\lambda(2m-2r-2\lambda-1)+(2m-2r-1)(r-\lambda)}{2m[r+\lambda(m-2)]}.$$

Заметим, что $\varphi_A(m,1)-\varphi_A(r,\lambda)>0$, когда $r<m$. Если $r=m$, то

$$\varphi_A(m,1)-\varphi_A(r,\lambda)=\frac{\lambda(\lambda-1)(m-2)+m(\lambda^2-1)}{2m[r+\lambda(m-2)]}. \qquad (10.4.1)$$

Так как m нечетно, $\lambda\neq 0$ вследствие теоремы 10.3.4. При $\lambda\neq 0$ выражение (10.4.1) строго больше нуля. Таким образом, A-оптимальность плана доказана.

Оптимальность в смысле Эренфельда (или E-оптимальность) плана **D** сразу следует из вида функций эффективности (10.2.6) и из теоремы 10.3.4.

Перейдем теперь к доказательству D-оптимальности плана **D**. Очевидно, что

$$\varphi_D(m,1)-\varphi_D(m-1,0)=m(m-1)^{m-1}>0. \qquad (10.4.2)$$

Далее,

$$\varphi_D(m,1)-\varphi_D(m,-1)=(m-1)^{m-1}(2m-1)-(m+1)^{m-1}$$
$$=2\{m^{m-3}[(m-1)C_{m-1}^2-C_{m-1}^3]+m^{m-5}[(m-1)C_{m-1}^4-C_{m-1}^5]+\cdots$$
$$+m^2[(m-1)C_{m-3}^{m-1}-C_{m-2}^{m-1}]+(m-1)\}.$$

Однако $(m-1)C_{m-1}^i>C_{m-1}^{i+1}$.
Поэтому получаем

$$\varphi_D(m,1)>\varphi_D(m,-1). \qquad (10.4.3)$$

Так как m нечетно, λ не может быть нулем. Используя теперь лемму 10.4.1, а также неравенства (10.4.2) и (10.4.3), докажем D-оптимальность плана **D**, а с этим и всю теорему.

Теорема 10.4.2 [7]. Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{D}$ – матрица коэффициентов плана **D** для модели (10.1.3), $m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, $m\neq 2$, и

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}=(m-2)\mathbf{E}_m+2\mathbf{J}_m.$$

Тогда **D** есть D-оптимальный план типа $[m,\ 0,\ 2]$ на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi_D(m,2)-\varphi_D(m-1,0)$$
$$=(m-1)\left\{\left[1-\frac{1}{m-1}\right]^{m-1}\left[3+\frac{1}{m-1}\right]-1\right\}. \qquad (10.4.4)$$

В неравенстве

$$a<-\ln(1-a)<a/(1-a)\quad (0<a<1)$$

сделаем подстановку $a = 1/(m-1)$. Тогда получим, что

$$\left(1-\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} > \exp\left(-\frac{m-1}{m-2}\right).$$

Отсюда следует, что (10.4.4) больше нуля, если

$$3exp\left(-\frac{m-1}{m-2}\right)-1 > 0.$$

Последнее справедливо для $m > 11$. Непосредственно проверкой легко убедиться в том, что

$$\varphi_D(m,2) > \varphi_D(m-1,0)$$

для $m = 5, \dots, 11$. Следовательно,

$$\varphi_D(m,2) > \varphi_D(m-1,0) \quad (m \geq 5). \tag{10.4.5}$$

Из теоремы 10.4.1 следует, что λ не может быть равно ± 1, когда $r = m \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. Не существует также матриц Адамара в этом случае, поэтому $\lambda \neq 0$. Таким образом, из леммы 10.4.1 и неравенства (10.4.5) следует утверждение следующей теоремы.

Теорема 10.4.3 [5]. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{D}$ – матрица коэффициентов плана **D** для модели (10.1.3), $m \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ и

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (m-3)\mathbf{E}_m + 3\mathbf{J}_m.$$

Тогда **D** есть A- и E-оптимальный план типа $[m,\ 0,\ 3]$ на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Используя (10.2.3), запишем

$$\begin{aligned}&\varphi_A(m,3)-\varphi_A(m-v,\lambda)\\ &= (m-v-\lambda)[m(4v+4\lambda-9)-6v-6\lambda+9]\\ &+\frac{\lambda[(4v+4\lambda-13)m^2+(4-v-\lambda)\,6m-9]}{m(4m-6)[m-v+(m-2)\lambda]}.\end{aligned} \tag{10.4.6}$$

Очевидно, что выражение (10.4.6) будет положительным, когда $\lambda = -1$ и $m > 3$, а также в том случае, когда $v + \lambda > 3$. Если $v + \lambda = 3$, для выражения (10.4.6) можно записать

$$\frac{(m-3)^2(3-\lambda)}{m(4m-6)[m-3+(m-1)\lambda]},$$

что неотрицательно, так как $\lambda \leq 3$. Следовательно, выражение (10.4.6) неотрицательно для $v + \lambda \geq 3$. Таким образом, доказана A-оптимальность плана **D**, так как на основании п. 1 теоремы 10.3.5 планы $[m,\ v,\ \lambda]$ при $v + \lambda = 0, 1, 2$ и $m \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ не существуют. Отсюда же, рассматривая непосредственно вид функции эффективности (10.2.6), получим E-оптимальность плана **D**. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 10.4.4 [5]. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{D}$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3) и $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. И пусть

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (m-3)\mathbf{E}_m + 3\mathbf{J}_m \quad \text{для} \quad m > 15,$$

и

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (m+1)\mathbf{E}_m - \mathbf{J}_m \quad \text{для} \quad m \leq 15.$$

Тогда $\mathbf{D}$ есть D-оптимальный план на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\varphi_D(m,3) - \varphi_D(m-v,\lambda)$$
$$= m(m-3)^{m-1}\left\{4 - \frac{3}{m} - \left(\lambda + 1 - \frac{v+\lambda}{m}\right)\left[1 - \frac{v+\lambda-3}{m-3}\right]^{m-1}\right\}. \tag{10.4.7}$$

Можно показать, что выражение в правой части равенства (10.4.7) положительно для $m > 3$, $v + \lambda \geq 3$ и $\lambda \geq 0$. Из п. 1 теоремы 10.3.5 следует, что $[m,\ v,\ \lambda]$ не существуют при $-1 < v + \lambda < 3$. Таким образом, осталось рассмотреть случай $v + \lambda = -1$ $(v = 0,\ \lambda = -1)$. Исходя из равенства (10.4.7), запишем

$$\varphi_D(m,3) - \varphi_D(m,-1)$$
$$= (m-3)^{m-1}\left\{(4m-3) - \left[1 + \frac{4}{m-3}\right]^{m-1}\right\}. \tag{10.4.8}$$

Выражение (10.4.8) положительно при $m > 14$ и отрицательно при $3 \leq m \leq 14$. В соответствии с п. 1 теоремы 10.3.5 план $[15, 0, 3]$ не существует. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 10.4.5 [5]. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{D}$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3), $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $m > 5$ и

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (m-5)\mathbf{E}_m + \mathbf{J}_m.$$

И пусть план $[m,\ 0,\ 1]$ не существует. Тогда $\mathbf{D}$ есть A-, D- и E-оптимальный план типа $[m,\ 0,\ 5]$ на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Для $m > 5$ и $v + \lambda \geq 5$

$$\varphi_A(m,5) - \varphi_A(m-v,\lambda)$$
$$= \frac{(m-v-\lambda)[(6m-10)(v+\lambda) - 25(m-1)]}{m(6m-10)[m-v+(m-2)\lambda]} \tag{10.4.9}$$
$$+ \frac{\lambda[m(6m-10)(v+\lambda) - 31m^2 + 60m - 25]}{m(6m-10)[m-v+(m-2)\lambda]}$$

и

$$\varphi_D(m,5) - \varphi_D(m-v,\lambda)$$

$$= m(m-5)^{m-1}\left\{\left(6-\frac{5}{m}\right)\right. \quad (10.4.10)$$

$$\left. -\left(\lambda+1+\frac{v+\lambda}{m}\right)\left[1-\frac{v+\lambda-5}{m-5}\right]^{m-1}\right\}.$$

Вследствие п. 2 теоремы 10.3.5 планы $[m,\ v,\ \lambda]$ не существуют при $v+\lambda<5$, кроме случая $v=0,\quad \lambda=1$, то есть случая плана $[m,\ 0,\ 1]$. Это доказывает A- и D-оптимальность плана $\mathbf{D}$. E-оптимальность следует из непосредственного рассмотрения функции эффективности (10.2.6).

§ 5. Построение планов $[m,\ v,\ \lambda]$

Будем заниматься построением планов, матрицы моментов которых удовлетворяют различным достаточным условиям в соответствии с теоремами предыдущего параграфа, а именно: $[m,0,-1]$, $[m,0,1]$, $[m,0,2]$, $[m,0,3]$, $[m,0,5]$.

Общий метод построения планов $[m,0,\lambda]$ состоит в получении их из сбалансированных неполноблочных планов.

Теорема 10.5.1 [5]. Если существует сбалансированный неполноблочный план с параметрами $v^*,\ b^*,\ k^*,\ r^*,\ \lambda^*$, удовлетворяющими равенствам $v^*=b^*$, $k^*=r^*$, то существует план $[m,0,\lambda]$, где

$$m=v^*=b^*,\quad \lambda=b^*-4r^*+4\lambda^*. \quad (10.5.1)$$

Доказательство. Построим матрицу $\mathbf{D}$ плана $[m,0,\lambda]$ из матрицы инцидентности неполноблочного плана путем замены в последней нулей на –1. В этом случае матрица $\mathbf{D}$ будет представлять собой квадратную матрицу порядка m с элементами –1 и +1. Скалярное произведение i-го и j-го столбцов матрицы $\mathbf{D}$ по определению сбалансированного неполноблочного плана будет содержать $2(r^*-\lambda^*)$ отрицательных членов и $b^*-2(r^*-\lambda^*)$ положительных членов. Таким образом,

$$\lambda=b^*-4r^*+4\lambda^*,$$

что и доказывает теорему.

Вследствие формулы (9.2.3)

$$\lambda^*=\frac{r^*(r^*-1)}{b^*-1}. \quad (10.5.2)$$

Подстановка равенства (10.5.2) в выражение (10.5.1) приводит к равенству

$$r=\frac{m\pm\sqrt{\lambda m-\lambda+m}}{2}. \quad (10.5.3)$$

Это дает возможность с учетом равенств (10.5.2) и (10.5.3) вычислять по заданному плану $[m, 0, \lambda]$ параметры сбалансированного неполноблочного плана, с помощью которого план $[m, 0, \lambda]$ строится.

Пример 10.5.1. Рассмотрим способ построения планов $[m, 0, 1]$ и $[m, 0, 2]$. По теореме 10.3.2 необходимое условие существования плана $[m, 0, 1]$ определяется равенством (10.3.2). Первые три значения m, удовлетворяющие (10.3.2), не считая $m = 1$, есть 5, 13 и 25. Вычисления по формулам (10.5.2) и (10.5.3) приводят к задаче нахождения сбалансированных неполноблочных планов со следующими параметрами соответственно:

$v^* = b^*$	$k^* = r^*$	λ^*
5	1	0
13	4	1
25	9	3

Известно, что такие сбалансированные планы существуют [8]. Таким образом, и планы $[5, 0, 1]$, $[13, 0, 1]$ и $[25, 0, 1]$ могут быть легко построены. Так, например, матрица инцидентности сбалансированного неполноблочного плана с параметрами $v^* = b^* = 5$, $k^* = r^* = 1$, $\lambda^* = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Замена нулей матрицы инцидентности на –1 приводит к плану [5, 0, 1]

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

По теореме 10.3.3 необходимое условие существования плана $[m, 0, 2]$ определяется равенством (10.3.3). Значения m, удовлетворяющие равенству (10.3.3), встречаются довольно редко. Так, для $m < 200$ имеется только два таких значения: $m = 6$ и m =66. Сбалансированный неполноблочный план, с помощью которого может быть построен план $[6, 0, 2]$, существует и имеет следующие параметры: $v^* = b^* = 6$, $k^* = r^* = 1$, $\lambda = 0$. Построение плана $[6, 0, 2]$ аналогично построению плана $[5, 0, 1]$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{S}_m = 2\mathbf{E}_m - \mathbf{J}_m. \tag{10.5.4}$$

Поскольку $\mathbf{S}_m^T\mathbf{S}_m = 4\mathbf{E}_m + (m-4)\mathbf{J}_m$, матрица $\mathbf{S}_m$ приводит к плану $[m,\ 0,\ m-4]$. Рассмотрим наиболее важные для приложений случаи небольших значений m.

Теорема 10.5.2. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{D} = \mathbf{S}_m$ – матрица коэффициентов плана $\mathbf{D}$ для модели (10.1.3), $m = 3, \dots, 9$. Тогда, за исключением случаев A- и E-оптимальности для $m = 6$ и D-оптимальности для $m = 7$ и $m = 8$, $\mathbf{D}$ есть A-, D- и E-оптимальный план типа $[m,\ 0,\ m-4]$ на множестве насыщенных планов $[m,\ v,\ \lambda]$ с областью измерений (10.1.4).

Доказательство. Для $m = 3$, как легко показать, с точностью до перестановок строк и столбцов и умножения на – 1 строк существует только по одному плану из множеств планов $[3,0,\lambda]$, $[3,1,\lambda]$ и $[3,2,\lambda]$: $[3,0,-1]$, $[3,1,1]$ и $[3,2,0]$. Непосредственное вычисление функций эффективности (10.2.3), (10.2.4) и (10.2.5) для этих планов доказывает A-, D- и E-оптимальность плана $[3,0,-1]$, то есть плана $\mathbf{S}_3 = 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{J}_3$.

Для $m = 4$ план $\mathbf{S}_4 = 2\mathbf{E}_4 - \mathbf{J}_4$ совпадает с матрицей Адамара $\mathbf{H}_4$ и поэтому A -, D - и E -оптимален.

Для $m = 5$ план $\mathbf{S}_5 = 2\mathbf{E}_5 - \mathbf{J}_5$ есть план $[5,0,1]$. A-, D- и E-оптимальность его следует из теоремы 10.4.1.

Для $m = 6$ план $\mathbf{S}_6 = 2\mathbf{E}_6 - \mathbf{J}_6$ есть план $[6,0,2]$. D-оптимальность его следует из теоремы 10.4.2. В то же время не существует A- и E-оптимальных планов на множестве планов $[6,v,\lambda]$ среди планов $[6,0,\lambda]$. Действительно, с помощью теоремы 10.3.4 легко показать, что $[6,0,2]$ – единственный представитель множества планов $[6,0,\lambda]$. Однако план $[6,1,0]$ превосходит его по функциям эффективности (10.2.3) и (10.2.5).

Для $m = 7$ план $\mathbf{S}_7 = 2\mathbf{E}_7 - \mathbf{J}_7$ есть план $[7,0,3]$. A- и E-оптимальность его следует из теоремы 10.4.3. D-оптимальным является план $[7,0,-1]$. К тому же $\varphi_D(7,\ 3) < \varphi_D(7,-1)$ (см. доказательство теоремы 10.4.4).

Для $m = 8$ A-, D- и E-оптимальным является план, задаваемый матрицей Адамара $\mathbf{H}_8$.

Для $m = 9$ план $\mathbf{S}_9 = 2\mathbf{E}_9 - \mathbf{J}_9$ есть план $[9,0,5]$. A-, D- и E-оптимальность его следует из теорем 10.3.2 и 10.4.5.

Таким образом, для $m = 3, \dots, 9$ все оптимальные планы $[m,0,\lambda]$ могут быть легко построены. Способ построения планов $\mathbf{S}_m$ определяется выражением (10.5.4). План $[7,0,-1]$, как и любой другой план $[m,0,-1]$, где $m+1$ – число Адамара, можно получить, вычеркивая первый столбец и первую строку из нормализованной матрицы Адамара соответствующего порядка. Наконец, планы $[4,0,0]$ и $[8,0,0]$ задаются матрицами Адамара $\mathbf{H}_4$ и $\mathbf{H}_8$ соответственно.

§ 6. Насыщенные *D*-оптимальные планы первого порядка

В настоящем параграфе будем рассматривать задачу построения D-оптимальных планов для модели (10.1.3) на множестве насыщенных планов с областью измерений

$$-1 \leq x_i \leq 1. \tag{10.6.1}$$

Такая постановка задачи приводит к факторным планам. Известна следующая теорема.

Теорема 10.6.1. Существует насыщенный план, сосредоточенный на множестве (10.1.2), который является D-оптимальным планом для модели (10.1.3) на множестве насыщенных планов с областью измерений (10.6.1).

Доказательство. Пусть D – насыщенный план, который является D-оптимальным планом для модели (10.1.3) на множестве насыщенных планов с областью измерений (10.6.1). Покажем, что значение x_{iu}, которое принимает переменная x_i в u-й точке плана **D**, можно заменить на +1 или –1, не ухудшая критерий D-оптимальности. Действительно, поскольку план **D** – насыщенный, матрица коэффициентов **X** – квадратная и

$$\det(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = (\det \mathbf{X})^2.$$

Заменим теперь x_{iu} на –1, если алгебраическое дополнение элемента x_{iu} в матрице **D** меньше нуля, и заменим x_{iu} на +1, если алгебраическое дополнение больше либо равно нулю. Очевидно, что такая замена не ухудшает значений $\det \mathbf{X}$ и, следовательно, $\det(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$, что и доказывает теорему.

Из теоремы 10.6.1 следует, что задача построения D-оптимальных планов для модели (10.1.3) на множестве насыщенных планов с областью измерений (10.6.1) эквивалентна задаче отыскания матриц из +1 и –1 с максимальным определителем. Последнюю задачу называют детерминантной проблемой Адамара.

Обозначим через d_m максимальное значение определителя матрицы порядка m из +1 и –1. Вопросы нахождения d_m, верхних оценок для d_m и построения соответствующих матриц рассматриваются в работах многих авторов. В табл.17 даны значения верхних оценок d_m, полученные в работе [9], для $m = 3, \ldots, 9$.

Таблица 17.

Верхняя граница в детерминантной проблеме Адамара

m	3	4	5	6	7	8	9
Оценка d_m	2^2	2^4	2^5+2^4	2^7+2^5	2^9+2^6	2^{12}	$2^{14}-2^{11}$

Приведенные в табл.17 значения верхних оценок d_m для $m = 3, 4, 5$ и 8 достигаются на планах D-оптимальных на множестве насыщенных планов $[m, 0, \lambda]$, то есть на планах $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4 = \mathbf{H}_4$, $\mathbf{S}_5$ и $\mathbf{H}_8$ соответственно. Значения верхних оценок d_m для $m = 6, 7$ и 9 из табл. 17 на планах $[m, 0, \lambda]$ не достигаются.

Для нахождения планов, на которых достигаются значения верхних оценок из табл.17, можно использовать следующий простой вычислительный алгоритм. Каждый элемент начальной матрицы выбирается случайно (например, с использованием равномерно распределенных случайных чисел на отрезке [–1, +1]). Далее последовательно заменяется каждый из элементов матрицы на –1, если алгебраическое дополнение этого элемента отрицательно, и на +1, если оно неотрицательно. Очевидно, что при такой процедуре на каждом шаге получается значение определителя не меньше предыдущего. Причем равенство будет в том и только в том случае, когда соответствующее алгебраическое дополнение равно нулю.

Таким способом можно получить матрицы для $m = 6,\ 7$ и 9 со значениями определителей, равными верхним оценкам d_m. Для $m = 6$, например, матрица такого плана и матрица моментов имеют соответственно вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

§ 7. Модель с закрепленной точкой

Будем решать задачу нахождения *D*-оптимальных планов для модели (10.1.1) с ограничением

$$b_0 = b_1 + \dots + b_m \tag{10.7.1}$$

в области

$$-1 \le x_i \le 1 \quad (i = 1, \dots, m). \tag{10.7.2}$$

Как будет видно, решение этой задачи, полученное В.З.Бродским и Т.И.Голиковой [10, 11], приводит к планам, сосредоточенным на множестве (10.1.2). Отметим, что модель, получаемая добавлением ограничения (10.7.1) к факторной модели (10.1.1) для плана на множестве (10.1.2), не является факторной. Однако мы будем рассматривать эту модель, поскольку результаты этого параграфа связаны с другими результатами этой главы.

Подстановка в модель (10.1.1) выражения для b_0, задаваемого соотношением (10.7.1), дает следующую модель:

$$Ey = b_1' x_1' + \dots + b_m' x_m', \tag{10.7.3}$$

где $x_i' = (1 + x_i)/2, \quad b_i' = 2b_i$.

Множества (10.7.2) и (10.1.2) преобразуются при этом соответственно во множества

$$0 \le x_i' \le 1 \tag{10.7.4}$$

и

$$x_i' = 0, 1. \tag{10.7.5}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению D-оптимальных планов для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4).

Теорема 10.7.1. План **D** для модели (10.7.3) в области измерений (10.7.4) тогда и только тогда D-оптимален, когда его нормированная информационная матрица

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{cases} \dfrac{n}{2(2n-1)}(\mathbf{E}_m + \mathbf{J}_m), \text{ если } m = 2n-1, \\ \dfrac{n+1}{2(2n+1)}(\mathbf{E}_m + \mathbf{J}_m), \text{ если } m = 2n. \end{cases} \qquad (10.7.6)$$

Доказательство. Докажем достаточность условия (10.7.6) для D-оптимальности плана **D**. Необходимость тогда будет следовать из теоремы 4.3.2.

Для нормированной ковариационной матрицы $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ плана **D** можно записать

$$\frac{\bar{\mathbf{\Gamma}}}{\sigma^2} = \begin{cases} \dfrac{2n-1}{n^2}(2n\mathbf{E}_m - \mathbf{J}_m), \text{ если } m = 2n-1, \\ \dfrac{2}{n+1}[(2n+1)\mathbf{E}_m - \mathbf{J}_m], \text{ если } m = 2n. \end{cases}$$

$\bar{\mathbf{\Gamma}}$ – положительно определенная матрица, поэтому нормированная дисперсия $\bar{d}(\mathbf{D},\mathbf{x})$ оценки регрессионной функции в точке $\mathbf{x} = (x_1', \dots, x_m')$ есть строго выпуклая функция $\mathbf{x}$. Отсюда следует, что $\bar{d}(\mathbf{D}, \mathbf{x})$ на множестве (10.7.4) достигает максимума в вершинах. Любую вершину гиперкуба (10.7.4) можно представить как точку, координаты которой состоят из l единиц и $m-l$ нулей $(l = 0, 1, \dots, m)$. В такой вершине

$$\bar{d}(\mathbf{D},\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{2n-1}{n^2} l(2n-l), \text{ если } m = 2n-1, \\ \dfrac{2}{n+1} l(2n-l+1), \text{ если } m = 2n. \end{cases}$$

Максимум этой функции равен m и достигается при $l = n$, если $m = 2n-1$, а также при $l = n+1$, если $m = 2n$.

Реализуемость плана **D** с нормированной информационной матрицей вида (10.7.6) вытекает из следующих соображений. По теореме 4.3.2 точками D-оптимального плана могут быть лишь такие точки, в которых $d(\mathbf{D}, \mathbf{x})$ достигает максимума. Следовательно, из множества вершин гиперкуба (10.7.4) в D-оптимальный план могут включаться только те вершины, для которых $l = n$ при $m = 2n-1$ и для которых $l = n$ или $l = n+1$ при $m = 2n$. Легко показать, что нормированная информационная матрица плана, состоящего из всех вершин такого вида, имеет вид (10.7.6). Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим возможность построения D-оптимальных планов для модели (10.7.3) с наименьшим числом наблюдений. Получим сначала некоторые необходимые условия для числа наблюдений N в D-оптимальном плане. Пусть $m = 2n - 1 > 1$. Для D-оптимального плана отношения $nN/(2n-1)$ и $nN/2(2n-1)$ представляют собой соответственно число единиц в любом столбце матрицы плана и скалярное произведение ее двух столбцов. Так как элементы этих столбцов могут быть только 0 и 1, то эти отношения должны быть целыми числами. Величины n и $2n - 1$, не имеют общих множителей, поэтому в D-оптимальном плане $N \geq 2n - 1 = m$ при $n = 2k$ или $N \geq 2(2n - 1) = 2m$ при $n = 2k - 1$.

Точно так же можно показать, что при $m = 2n$ имеют место неравенства $N \geq m + 1$, если $n = 2k - 1$, или $N \geq 2(m + 1)$, если $n = 2k$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 10.7.2. Для D-оптимальности плана для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4) необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $N \geq 2m + 2$ при $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$,
2) $N \geq 2m$ при $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ $(m > 1)$,
3) $N \geq m + 1$ при $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$,
4) $N \geq \mathrm{m}$ при $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Теорема 10.7.3. Существует D-оптимальный план для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4) с минимальным числом наблюдений $N = m$, если $(m + 1)$ – число Адамара.

Доказательство. Пусть $\mathbf{H}_{m+1}$ – нормализованная матрица Адамара порядка $(m + 1)$. В матрице $-\mathbf{H}_{m+1}$ так же, как и в матрице $\mathbf{H}_{m+1}$, вследствие равенства (7.4.2) каждый столбец (кроме первого) имеет одинаковое число элементов –1 и +1, а именно, $(m + 1)/2$. Из выполнения условия пропорциональности частот следует, что в любой паре столбцов, кроме первого, комбинации (+1, +1), (–1, –1), (+1, –1) и (–1, +1) встречаются одинаковое число раз, а именно, $(m + 1)/4$. Вычеркнем теперь первый столбец и первую строку матрицы $-\mathbf{H}_{m+1}$, а элементы –1 получившейся при этом подматрицы заменим нулями. Полученная матрица порядка $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ является матрицей D-оптимального плана. Действительно, как легко показать, этому плану отвечает нормированная информационная матрица вида (10.7.6). К тому же этот план содержит минимальное число наблюдений (по теореме 10.7.2), что доказывает теорему.

Теорема 10.7.4. Если $m = p^h \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, где p простое, h целое, то существует D-оптимальный план для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4) с минимальным числом наблюдений $N = 2m$.

Доказательство. Пусть элементы матриц $\mathbf{X}' = \{x'_{ij}\}$ и $\mathbf{X}'' = \{x''_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ определяются выражениями

$$x'_{ii} = 1;\ x'_{ij} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{a_j - a_i}{p^h}\right)\right] \text{ при } i \neq j;$$

$$x''_{ii} = 1;\ x''_{ij} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{a_j - a_i}{p^h}\right)\right] \text{ при } i \neq j,$$

где $a_i, a_j \in GF(p^h)$, и круглые скобки означают символ Лежандра. Пусть $\mathbf{X} = \|\mathbf{X}', \mathbf{X}''\|^T$. Покажем, что $\mathbf{X}$ есть матрица искомого D-оптимального плана. Так как $\mathbf{X}$ имеет размер $2m \times m$, то остается показать, что диагональные элементы матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ равны $m+1$, а недиагональные элементы равны $(m+1)/2$.

Любой диагональный элемент матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ выражается суммой

$$(x'_{1j} + \cdots + x'_{mj}) + (x''_{1j} + \cdots + x''_{mj}) = m + 1.$$

Используя равенство (1.1.1), убеждаемся, что любой недиагональный элемент представляет собой сумму

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{m} x'_{ik}x'_{il} + \sum_{i=1}^{m} x''_{ik}x''_{il} \\
&= x'_{kk}x'_{kl} + x'_{lk}x'_{ll} + x''_{kk}x''_{kl} + x''_{lk}x''_{ll} \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \left[1 + \left(\frac{a_k - a_i}{p^h}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{a_l - a_i}{p^h}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \left[1 - \left(\frac{a_k - a_i}{p^h}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{a_l - a_i}{p^h}\right)\right] = \frac{1}{2}(m+1),
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Теорема 10.7.5. Существует D-оптимальный план для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4) и минимальным числом наблюдений $N = m + 1$, если $(m+2)$ – число Адамара.

Доказательство. Из теоремы 10.7.3 следует, что в этом случае существует D-оптимальный план с минимальным числом наблюдений для числа переменных $m' = m + 1 = 2n - 1$. Покажем, что, вычеркнув любой столбец этого плана, получим D-оптимальный план с минимальным числом наблюдений для числа переменных m. Нормированная информационная матрица нового плана будет иметь размер $m \times m$; ее диагональные и недиагональные элементы выражаются соответственно отношениями

$$\frac{(n-1)+1}{2(n-1)+1} \quad \text{и} \quad \frac{(n-1)+1}{2[2(n-1)+1]},$$

то есть полученный план для размерности $m = 2(n-1)$ D-оптимален. Так как $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, то вследствие теоремы 10.7.2 этот план содержит минимальное число наблюдений.

Теорема 10.7.6. Пусть $m = p^h - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, где p простое, h целое. Тогда существует D-оптимальный план для модели (10.7.3) с областью измерений (10.7.4), с минимальным числом наблюдений $N = 2m + 2$.

Доказательство. Из теоремы 10.7.4 следует, что в этом случае существует D-оптимальный план для числа переменных $m' = m + 1 = 2n - 1$. Так же, как и в теореме 10.7.5, можно доказать, что, вычеркнув любой столбец этого плана, получим D-оптимальный план для числа переменных $m = 2(n-1)$ с минимальным числом наблюдений.

Используя теоремы данного параграфа, можно, например, построить все D-оптимальные планы с минимальным числом наблюдений для $m < 20$.

Для $m = 3, 7, 11, 15, 19$ соответствующая матрица $\mathbf{X}$ D-оптимального плана – квадратная, порядка m и строится из матрицы Адамара. Она может быть получена циклической перестановкой элементов первой строки: (110) при $m = 3$, (1110100) при $m = 7$, (11011100010) при $m = 11$ и (1100111101010000110) при $m = 19$.

Для $m = 15$ матрица плана записана в табл. 18.

Таблица 18
***D*-оптимальный план для $m = 15$**

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

Для $m = 2, 6, 10, 14, 18$ матрица $\mathbf{X}$ D-оптимального плана может быть получена соответственно из планов для $m = 3, 7, 11, 15, 19$ вычеркиванием любого столбца.

Для $m = 5, 9, 13, 17$ матрица плана – прямоугольная, размера $2m \times m$. Ее можно представить в виде матрицы $\| \mathbf{X}', \mathbf{X}'' \|^T$, где $\mathbf{X}'' = \mathbf{E}_m + \mathbf{J}_m - \mathbf{X}'$. Для $m = 5, 13$ и 17 квадратная матрица $\mathbf{X}'$ порядка m может быть получена циклической перестановкой элементов первой строки: (11001) при $m = 5$, (1101100001101) при $m = 13$, (11101000110001011) при $m = 17$.

Для $m = 9$ матрица $\mathbf{X}'$ задается выражением

$$\mathbf{X}' = \left[\mathbf{E}_3 \circledast \left(\mathbf{J}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{E}_3\right)\right] + \left[\left(\mathbf{J}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{E}_3\right) \circledast \mathbf{E}_3\right],$$

где $\circledast$ – символ произведения Кронекера.

Для $m = 4, 8, 12, 16$ матрица $\mathbf{X}$ D-оптимального плана может быть получена соответственно из планов для $m = 5, 9, 13, 17$ вычеркиванием любого столбца.

Литература

1. Hotelling, H. (1944). Some improvements in weighing and other experimental techniques, *Ann. Math. Stat.,* **15**, 297–306.

2. Kishen, K. (1945). On the design of experiments for weighing and making other types of measurements. *Ann. Math. Statist.*, **16**, 294–300.

3. Mood, A.M. (1946). On Hotelling weighing problem. *Ann. Math. Statist.*, **17**, 432–446.

4. Ehrenfeld, S. (1953). On the efficiency of experimental designs. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 247–255.

5. Rao, M.B. (1966). Weighing designs when "n" is odd. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1371–1381.

6. Raghavarao, D. (1959). Some optimum weighing designs. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 295–303.

7. Raghavarao, D. (1960). Some aspects of weighing designs. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 878–884.

8. Cochran, W.G. and Cox, G.M. (1957). *Experimental designs*. New York: Wiley.

9. Ehlich, H. and Zellen, H. (1962). *Binare Matrizen. Z. Angew. Math. Mech.*, **42**, 20–21.

10. Бродский В.З., Голикова Т.И. (1971). *D-оптимальные планы для частного случая линейной регрессии*. М., Изд-во МГУ.

11. Бродский В.З., Голикова Т.И. (1972). Построение D-оптимальных планов взвешивания с минимальным числом наблюдений. *Теория вероятностей и ее применения*, **17**, 578–582.

Глава 11. Нерегулярные планы разрешающей способности 4, 5 и компромиссные планы

§ 1. Планы разрешающей способности 4

Минимальные планы

Рассмотрим вопрос о минимальном числе опытов плана разрешающей способности 4 для заданного числа факторов. Будем изучать два типа планов: 2^n и $2^n \times 3^m$.

Пусть при помощи плана **D** оцениваются параметры постулируемой A^{Ω}-модели истинных эффектов

$$E\mathbf{y}^f = b_0\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^f \mathbf{B}_i. \tag{11.1.1}$$

В действительности пусть модель имеет вид

$$E\mathbf{y}^f = b_0\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^f \mathbf{B}_i + \sum_{i>j} \mathbf{F}_{ij}^f \mathbf{B}_{ij}.$$

Лемма 11.1.1 [1]. Для того чтобы план $2^n/N$ (план **D**) имел разрешающую способность 4, необходимо и достаточно, чтобы не существовало нулевой линейной комбинации векторов $\mathbf{I}, \mathbf{F}_i^{fD}$, $\mathbf{F}_{i_1 i_2}^{fD}$ $(i,\ i_1,$ $i_2 = 1, \dots, n)$ такой, что не все коэффициенты для $\mathbf{F}_i^{fD}$ равны нулю.

Доказательство. Пусть для плана **D** разрешающей способности 4 не выполняется условие леммы. Тогда без ограничения общности можно считать, что для фактора F_1 справедливо равенство

$$\mathbf{F}_1^{fD} = c_0\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{F}_i^{fD} + \sum_{i_1>i_2} c_{i_1 i_2} \mathbf{F}_{i_1 i_2}^{fD}. \tag{11.1.2}$$

По предположению, существует такая матрица $\mathbf{W}_1$, что

$$\widehat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{W}_1^T \mathbf{y} \quad \text{и} \quad E\widehat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1.$$

Тогда

$$E\widehat{\mathbf{B}}_1 = E(\mathbf{W}_1^T \mathbf{y}) = \mathbf{W}_1^T \mathbf{I} b_0 + \mathbf{W}_1^T \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{fD} \mathbf{B}_i + \mathbf{W}_1^T \sum_{i_1>i_2} \mathbf{F}_{i_1 i_2}^{fD} \mathbf{B}_{ij}.$$

Поэтому

$$\mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_1^{fD} = \mathbf{I},\quad \mathbf{W}_1^T\mathbf{I} = \mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_i^{fD} = \mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_{i_1i_2}^{fD} = 0$$
$$(i,\ i_1,\ i_2 = 1, \dots, n).$$

Однако вследствие (11.1.2)

$$\mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_1^{fD} = c_0\mathbf{W}_1^T\mathbf{I} + \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_1^{fD} + \sum_{i_1>i_2} c_{i_1i_2}\mathbf{W}_1^T\mathbf{F}_{i_1i_2}^{fD} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость условия леммы.

Докажем его достаточность. Пусть условие леммы выполняется. Тогда матрица $\mathbf{A}$, составленная из векторов матриц $\mathbf{F}_i^{fD}$ $(i = 1, \dots, n)$ имеет ранг $q\sum_{i=1}^n(s_i - 1)$. Предположим, что ранг матрицы векторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{F}_{i_1i_2}^{fD}$ $(i_1,\ i_2 = 1, \dots, n)$ есть r. Выберем из этой матрицы подматрицу $\mathbf{B}$ из r столбцов ранга r. По предположению $\mathrm{Rg} \parallel \mathbf{A}, \mathbf{B} \parallel = q + r$. Каждая м.н.к.-оценка $\hat{b}_i$ определяется линейной функцией наблюдений с некоторым вектором коэффициентов, который должен быть ортогонален любому вектору из $\mathbf{B}$. Эта ортогональность должна распространяться на все линейные комбинации r столбцов матрицы $\mathbf{B}$ и, таким образом, на все двухфакторные эффекты взаимодействия, что и требовалось.

Теорема 11.1.1 [1, 2]. План 2^n разрешающей способности 4 для n факторов должен содержать не менее $2n$ опытов.

Доказательство. Множество векторов $\mathbf{F}_1^{fD}, \dots, \mathbf{F}_n^{fD}$ линейно независимо. Тогда линейно независимо множество векторов $\mathbf{I}, \mathbf{F}_{12}^{fD}, \dots, \mathbf{F}_{1n}^{fD}$. Поскольку разрешающая способность плана равна 4, вследствие леммы 11.1.4 получим, что множество $\mathbf{F}_1^{fD}, \dots, \mathbf{F}_n^{fD}, \mathbf{I}, \mathbf{F}_{12}^{fD}, \dots, \mathbf{F}_{1n}^{fD}$ также будет линейно независимо. Так как число элементов этого множества равно $2n$, число экспериментов плана должно быть не менее $2n$**.** Таким образом, теорема доказана.

Используя метод доказательства теоремы 11.1.1, можно получить следующий результат.

Теорема 11.1.2 [2]. План 2^n разрешающей способности 4 позволяет получить единственные оценки коэффициентов $\mathbf{A}^\Omega$-модели, включающей, помимо главных эффектов всех факторов, все двухфакторные эффекты взаимодействия некоторого фактора.

Следующая теорема также может быть получена с применением леммы 11.1.1. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 11.1.3 [1]. План $2^n \times 3^m$ $(m > 0)$ разрешающей способности 4 должен содержать не менее $3(n + 2m - 1)$ опытов.

Построение минимальных планов

Минимальный план 2^n разрешающей способности 4, то есть план с числом опытов $N = 2n$, может быть легко построен с помощью метода

Бокса (G.E.P.Box) и Хантера (J.S.Hunter) [3], аналогичного методу главы 7. В этой главе строились регулярные планы мощности 3 из регулярных планов мощности 2 с помощью техники, носящей название «fold-over» (перевертыш). Эта техника может быть использована для построения планов разрешающей способности 4 из планов разрешающей способности 3. Эффективности φ планов $2^n//2n$ разрешающей способности 4, полученных из планов $2^{n-1}//n$ разрешающей способности 3, приведены в табл. 19. В последней строке таблицы указана ссылка на работу, в которой построен соответствующий план $2^{n-1}//n$ разрешающей способности 3.

Таблица 19
Эффективность минимальных планов [1]

n	3	5	6	7	10	13	14	18	25	26
Эффективность	0.67	0.90	0.83	0.65	0.90	0.96	0.93	0.94	0.98	0.96
Ссылка	[4]	[4]	[4]	[2]	[5]	[6]	[5]	[5]	[6]	[5]

Оценивание параметров и разбиение на блоки

Опишем простой способ [7] оценки параметров для планов типа «fold-over».

Пусть матрица коэффициентов плана $2^{n-1}//n$ разрешающей способности 3 для модели (11.1.1) есть $\mathbf{X}_1$. Тогда матрица коэффициентов плана **D** разрешающей способности 4, построенного техникой «fold-over» из первого плана, для модели (11.1.1) есть

$$\mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{X}_1 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку первый столбец **X** ортогонален всем остальным столбцам, вектор м.н.к.-оценок есть

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^T(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \tag{11.1.3}$$

где $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ – векторы наблюдений для первой и второй половины плана **D** соответственно. Так как $\mathbf{X}_1$ – квадратная невырожденная матрица, равенство (11.1.3) эквивалентно равенству

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\mathbf{X}_1^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2). \tag{11.1.4}$$

Из формул для оценивания вектора параметров (11.1.3) и (11.1.4) следует, что планирование может быть разбито на блоки, размером 2 каждый. В любой блок будет входить некоторый опыт и его «отраженный». Присутствие при этом блокового эффекта не изменит вектор оценок параметров $\widehat{\mathbf{B}}$.

§ 2. Компромиссные планы и планы разрешающей способности 5

Рассмотрим методы получения невырожденных компромиссных нерегулярных планов 2^n, которые позволяют строить планы менее эффективные, чем регулярные, но содержащие значительно меньшее число опытов.

Объединение планов

В этом разделе опишем метод Аддельмана (S.Addelman) [8] построения негеометрических планов с помощью объединения геометрических планов одного семейства.

Пусть четыре дробных геометрических плана $2^5//8$ заданы следующими определяющими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&1 = -x_1x_2x_3 = -x_1x_4x_5 = x_2x_3x_4x_5,\\
&1 = -x_1x_2x_3 = x_1x_4x_5 = -x_2x_3x_4x_5,\\
&1 = x_1x_2x_3 = -x_1x_4x_5 = -x_2x_3x_4x_5,\\
&1 = x_1x_2x_3 = x_1x_4x_5 = x_2x_3x_4x_5.
\end{aligned}
\tag{11.2.1}
$$

Планы, получаемые с использованием определяющих соотношений (11.2.1), образуют полный набор дробных планов семейства с главными генераторами $x_1x_2x_3$ и $x_1x_4x_5$. Эти планы можно задать табл. 20, в которой указаны лишь знаки, которые следует приписывать каждому определяющему взаимодействию.

Таблица 20
Объединение планов одного семейства

Определяющие взаимодействия	Планы семейства			
	1	2	3	4
$x_1x_2x_3$	–	–	+	+
$x_1x_4x_5$	–	+	–	+
$x_2x_3x_4x_5$	+	–	–	+

Опыты, составляющие нерегулярный план **D** $2^5//24$, могут быть получены выбором опытов, входящих в любые три из четырех планов табл. 20.

Определение 11.2.1. Пусть $\mathbf{F}_P^{fD}$ и $\mathbf{F}_Q^{fD}$ – два эффекта, порождаемые планом **D** и отвечающие взаимодействиям P и Q. Будем говорить, что $\mathbf{F}_P^{fD}$ смешан с $\mathbf{F}_Q^{fD}$, если $\mathbf{F}_P^{fD} = \mathbf{F}_Q^{fD}$ или $\mathbf{F}_P^{fD} = -\mathbf{F}_Q^{fD}$; не смешан с $\mathbf{F}_Q^{fD}$, если $\mathbf{F}_P^{fD}$ ортогонален $\mathbf{F}_Q^{fD}$; частично смешан с $\mathbf{F}_Q^{f\mathrm{D}}$, если $\mathbf{F}_P^{f\mathrm{D}}$ не ортогонален $\mathbf{F}_P^{fD}$, $\mathbf{F}_P^{f\mathrm{D}} \neq \mathbf{F}_Q^{f\mathrm{D}}$ и $\mathbf{F}_P^{f\mathrm{D}} \neq -\mathbf{F}_Q^{f\mathrm{D}}$.

Если все знаки, связанные с данным взаимодействием R в определяющих соотношениях выбранных из табл. 20 планов, равны, то $\mathbf{F}_R^{fD}$ смешан с **I**. В этом случае для любого взаимодействия S эффекты $\mathbf{F}_{RS}^{fD}$ и $\mathbf{F}_S^{fD}$ смешаны. Если же не все знаки равны, то $\mathbf{F}_R^{fD}$ частично смешан с **I**. Так же частично смешаны $\mathbf{F}_{RS}^{fD}$ и $\mathbf{F}_S^{fD}$.

Рассмотрим k планов $2^n//2^{n-m}$ одного семейства, записанных в таблице, аналогичной табл. 20. Будем изучать A^{Ω} -модель истинных эффектов, содержащую члены, которые соответствуют несмешанным или частично смешанным эффектам.

Члены в модели сгруппируем таким образом, чтобы частично смешанные эффекты были смежными. Тогда информационная матрица будет состоять из блоков разных размеров вдоль главной диагонали, соответствующих частично смешанным эффектам. Пусть t знаков из k, связанных с каким-либо взаимодействием определяющего соотношения – это плюсы и $k-t$ знаков – минусы. Тогда внедиагональные элементы соответствующего блока информационной матрицы равны $(2t-k)2^{n-m}$. При $2t-k=-1$ блок вдоль главной диагонали информационной матрицы плана $2^n//3\cdot 2^{n-m}$ имеет вид

$$2^{n-m+2}\mathbf{E}_p - 2^{n-m}\mathbf{J}_p.$$

Поскольку все элементы вне блоков равны нулю, ковариационная матрица может быть получена обращением каждого из блоков по отдельности. Следовательно, ковариационная матрица состоит из блоков вдоль диагонали вида

$$2^{-n+m-2}\left\| \ \mathbf{E}_p + \frac{1}{4-p}\mathbf{J}_p \ \right\| \tag{11.2.2}$$

(полагаем для простоты $\sigma^2 = 1$).

Когда $p=2$, блок вдоль диагонали в ковариационной матрице есть

$$2^{-n+m-3}\| \ 2\mathbf{E}_p + \mathbf{J}_p \ \| = 2^{-n+m-3}\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Когда $p=3$, блок есть

$$2^{-n+m-2}\| \ \mathbf{E}_3 + \mathbf{J}_3 \ \| = 2^{-n+m-2}\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Легко показать [8], что оценки для плана $2^n//3\cdot 2^{n-m}$ в зависимости от типа смешивания имеют следующий вид.

1. Если $\mathbf{F}_P^{fD}, \mathbf{F}_Q^{fD}$ и $\mathbf{F}_R^{fD}$ – эффекты, частично смешанные друг с другом, то оценки $\hat{b}_P, \hat{b}_Q$ и $\hat{b}_R$ получаем из матричного равенства

$$\left\| \begin{matrix} \hat{b}_P \\ \hat{b}_Q \\ \hat{b}_R \end{matrix} \right\| = 2^{-n+m-1} \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{y}^T \mathbf{F}_P^{fD} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_Q^{fD} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_R^{fD} \end{matrix} \right\|$$

и

$$\sigma^2\{\hat{b}_P\} = \sigma^2\{\hat{b}_Q\} = \sigma^2\{\hat{b}_R\} = 2^{-n+m-1}\sigma^2.$$

2. Если $\mathbf{I}$, $\mathbf{F}_P^{fD}$ и $\mathbf{F}_Q^{fD}$ – частично смешанные эффекты, то

$$\left\| \begin{matrix} 2\hat{b}_0 \\ \hat{b}_P \\ \hat{b}_Q \end{matrix} \right\| = 2^{-n+m-1} \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{y}^T \mathbf{I} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_P^{fD} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_Q^{fD} \end{matrix} \right\|$$

и

$$\sigma^2\{\hat{b}_P\} = \sigma^2\{\hat{b}_Q\} = 2^{-n+m-1}\sigma^2.$$

3. Если $\mathbf{F}_P^{fD}$ и $\mathbf{F}_Q^{fD}$ частично смешаны друг с другом и больше нет эффектов, частично смешанных с ними, то

$$\left\| \begin{matrix} \hat{b}_P \\ \hat{b}_Q \end{matrix} \right\| = 2^{-n+m+2} \left\| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{y}^T \mathbf{F}_P^{fD} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_Q^{fD} \end{matrix} \right\|$$

и

$$\sigma^2\{\hat{b}_P\} = \sigma^2\{\hat{b}_Q\} = 3 \cdot 2^{-n+m-1}\sigma^2.$$

4. Если $\mathbf{I}$ и $\mathbf{F}_P^{fD}$ частично смешаны друг с другом и больше нет эффектов, частично смешанных с ними, то

$$\left\| \begin{matrix} 2\hat{b}_0 \\ \hat{b}_P \end{matrix} \right\| = 2^{-n+m+2} \left\| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{y}^T \mathbf{I} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{F}_P^{fD} \end{matrix} \right\|$$

и

$$\sigma^2\{2\hat{b}_0\} = \sigma^2\{\hat{b}_P\} = 3 \cdot 2^{-n+m-1}\sigma^2.$$

Из вида (11.2.2) следует, что невозможно существование невырожденного блока при $p = 4$.

Приведем табл. 21 [8] важных для приложений планов описанного типа. Во всех случаях, кроме первого плана, предполагается, что модель содержит свободный член и члены, соответствующие главным эффектам и двухфакторным эффектам взаимодействия. Для первого плана предполагается дополнительно отсутствие одного из членов, отвечающих двухфакторным эффектам взаимодействия.

Таблица 21
Полезные негеометрические дробные факторные планы 2^n

Обозначение плана	Генераторы	Планы семейства		
		1	2	3
$2^3//6$	x_1x_2 x_1x_3	+ −	− −	− +
$2^4//12$	$x_1x_2x_3$ $x_1x_2x_4$	− −	− +	+ −
$2^5//24$	$x_1x_2x_3$ $x_1x_4x_5$	− −	− +	+ −
$2^6//24$	$x_1x_2x_3x_4x_5$ $x_1x_2x_6$ x_1x_5	+ − +	+ − −	+ + −
$2^6//48$	$x_1x_2x_3x_4$ $x_1x_2x_5x_6$	+ −	− −	− +
$2^7//48$	$x_1x_2x_3x_4x_5$ $x_1x_2x_6$ $x_1x_5x_7$	+ − −	+ − +	+ + −
$2^8//48$	$x_1x_2x_3x_4x_5$ $x_1x_2x_6x_7x_8$ $x_1x_3x_6$ $x_2x_5x_7$	+ + − −	+ + − +	+ + + −
$2^9//96$	$x_1x_2x_3x_4x_5$ $x_1x_2x_6x_7x_8$ $x_1x_3x_6$ $x_2x_5x_7x_9$	+ + − +	+ + − −	+ + + −

Пополнение планов

P.W.M.John [9] ввел идею особого типа последовательного планирования, когда сначала проводится серия экспериментов $2^n//2^{n-1}$, а затем на основе полученной информации добавляется другая серия $2^n//2^{n-m}$.

Рассмотрим сначала пополнение геометрического плана $2^n//2^{n-1}$ планом $2^n//2^{n-3}$. Запишем пополняемый план $\mathbf{D}_1$ при помощи определяющего соотношения

$$1 = -\mathrm{P}.$$

Пополнение $\mathbf{D}_2$ зададим определяющим соотношением

$$1 = P = Q = PQ = R = PR = QR = PQR.$$

Эффекты $\mathbf{F}_S^{fD_1}$, $\mathbf{F}_{PS}^{fD_1}$, $\mathbf{F}_{QS}^{fD_1}$, $\mathbf{F}_{PQS}^{fD_1}$,$\mathbf{F}_{RS}^{fD_1}$,$\mathbf{F}_{PRS}^{fD_1}$,$\mathbf{F}_{QRS}^{fD_1}$,$\mathbf{F}_{PQRS}^{fD_1}$ будут смешаны в связанном множестве плана $\mathbf{D}_1$. Пары $\mathbf{F}_S^{fD_2}$ и $\mathbf{F}_{PS}^{fD_2}$, $\mathbf{F}_{QS}^{fD_1}$ и $\mathbf{F}_{PQS}^{fD_2}$ и т. д. – смешаны в связанных множествах плана $\mathbf{D}_2$. Группируя эффекты соответствующим образом, получим, как и выше, информационную матрицу в виде блоков вдоль главной диагонали. Каждый из блоков имеет вид

$$\mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 5 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 5 \end{Vmatrix} 2^{n-3}.$$

Очевидно, $\operatorname{Rg} \mathbf{U} = 5$. Нельзя, однако, предположив, что любые три эффекта равны нулю, получить невырожденную матрицу порядка 5 и, таким образом, оценить оставшиеся эффекты. Легко видеть, что невырожденная матрица получится тогда и только тогда, когда будут вычеркнуты три столбца и три строки любых трех из имеющихся четырех пар. Это означает следующее. План делит все эффекты на связанные пары. В каждом связанном множестве для плана $\mathbf{D}_2$ находятся четыре такие пары. Если три из этих пар имеют нулевые эффекты, то остальные эффекты могут быть оценены (то есть могут быть найдены единственные м.н.к.-оценки). Если же имеется хотя бы две пары, в которых ни один эффект не равен нулю, то эффекты не могут быть оценены, независимо от того, сколько ненулевых эффектов осталось.

Исключая по одному члену каждой из трех последних пар, получим матрицу

$$2^{n-3} \begin{Vmatrix} 8\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_{2,3} \\ \mathbf{J}_{3,2} & 4\mathbf{E}_3 + \mathbf{J}_3 \end{Vmatrix}$$

и обратную к ней матрицу

$$2^{-n} \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_2 + 3\mathbf{J}_2 & -\mathbf{J}_{2,3} \\ -\mathbf{J}_{3,2} & 2\mathbf{E}_3 \end{Vmatrix}.$$

В общем случае рассмотрим добавление плана $2^n//2^{n-m}$ к плану $2^n//2^{n-1}$.

Пусть план $\mathbf{D}_1$ задается определяющим соотношением

$$1 = -P,$$

а план $\mathbf{D}_2$ – определяющим соотношением

$$1 = P = Q = PQ = \cdots$$

Матрицы $\mathbf{U}$ порядка 2^m содержат подматрицы $2^m\mathbf{E}_2 - (2^{m-1} - 1)\mathbf{J}_2$ вдоль главной диагонали и единицы на других местах. И здесь можно показать, что в каждом связанном множестве для плана $\mathbf{D}_1$ только одна пара эффектов может быть ненулевой.

Если в связанном множестве для плана $\mathbf{D}_1$ имеется одна пара с обоими ненулевыми эффектами и $p > 0$ пар с одним ненулевым эффектом, получим после вычеркивания соответствующих строк и столбцов

$$\mathbf{U} = 2^{n-m} \left\| \begin{matrix} 2^m\mathbf{E}_2 - (2^{m-1} - 1)\mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_{2,p} \\ \mathbf{J}_{p,2} & 2^{m-1}\mathbf{E}_n - \mathbf{J}_p \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$\mathbf{U}^{-1} = 2^{-n} \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_2 + \frac{1}{2}(2^{m+1} - 1 + p)\mathbf{J}_2 & -\mathbf{J}_{2,p} \\ -\mathbf{J}_{p,2} & 2\mathbf{E}_p \end{matrix} \right\|.$$

Единственный ненулевой эффект в паре оценивается из плана $\mathbf{D}_1$. Предположим, что пара ненулевых эффектов есть $\mathbf{F}_S^{fD}$ и $\mathbf{F}_{PS}^{fD}$. Пусть $\hat{b}_S^h$ и $\hat{b}_S^l$ – оценки соответственно из планов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Тогда легко показать, что

$$\hat{b}_S = \frac{\hat{b}_S^* + \hat{b}_S^h}{2},$$

где $\hat{b}_S^* = \hat{b}_S^l - \left(\hat{b}_{QS}^h + \hat{b}_{RS}^h + \cdots\right)$ и члены в скобках соответствуют оставшимся ненулевым эффектам.

Если в связанном множестве для плана $\mathbf{D}_2$ имеются только пары с одним ненулевым эффектом, то

$$\mathbf{U} = 2^{n-m}\| \ 2^{m-1}\mathbf{I}_p - \mathbf{J}_p \ \|,$$
$$\mathbf{U}^{-1} = 2^{-n+1}\| \ \mathbf{I}_p - (p + 2^{m-1})^{-1}\mathbf{J}_p \ \|.$$

Оценки коэффициентов можно находить по формуле

$$\hat{b}_S = (p + 2^{m-1})^{-1}\left[\hat{b}_S^* + (p + 2^{m-1} - 1)\hat{b}_S^h\right],$$

где $b_S^* = b_S^l - \left(b_{QS}^h + \cdots\right)$ и скобки содержат $p - 1$ членов.

Построенные планы допускают разбиение на блоки [10].

Литература

1. Margolin, B.H. (1969). Results on factorial designs of resolution IV for the 2^n and 2^n3^m series. *Technometrics*, **11**, 431–444.

2. Webb, R.S. (1968). Non-orthogonal designs of even resolution. *Technometrics*, **10**, 291–299.

3. Box, G.E.P and Hunter, J.S. (1961). The $2^{к-p}$ fractional factorial designs, Part 1. *Technometrics*, **3**, 311-351; Part 2. *Technometrics*, **3**, 449–458.

4. Mood, A.M. (1946). On Hotelling weighing problem. *Ann. Math. Statist.*, **17**, 432–446.

5. Yang, C. H. (1968). On designs of maximal (+1, -1) matrices of order $n \equiv 2 \pmod 4$. *Math. Comput.*, **22**, 174–180.

6. Raghavarao, D. (1959). Some optimum weighing designs. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 295–303.

7. Margolin, B.H. (1972). Non-orthogonal main effect designs for asymmetrical factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **34**, 431–440.

8. Addelman, S. (1961). Irregular fractions of the 2^m factorial experiments. *Technometrics*, **3**, 479–496.

9. John, P.W.M. (1966). Augmenting 2^{n-1} designs. *Technometrics*, **2**, 469–480.

10. John, P.W.M. (1964). Blocking of $3(2^{n-k})$ designs. *Technometrics*, **6**, 371–376.

Приложение 1. Каталог

Каталог включает важные для приложений факторные планы для различных типов моделей. Потенциально возможно построить громадное число планов, поэтому непосредственное включение их в каталог является трудной задачей. Мы приводим экономичный способ косвенного представления факторных планов в каталоге с использованием следующих разделов.

Раздел I содержит вспомогательные матрицы, которые могут быть преобразованы в различные факторные планы. В разделе II описаны способы получения регулярных равномерных планов с помощью вспомогательных матриц раздела I. Планы раздела II в соответствии с §5 главы 4 являются D- и Q-оптимальными (функция эффективности φ для них равна единице).

В качестве примера использования разделов I и II каталога рассмотрим способ получения регулярного равномерного плана главных эффектов $4^6//16$. По таблице симметричных планов раздела II находим, что искомый план образуют с 16-го по 20-й столбцы вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{16}$. Этот план записан в первой секции табл. 22.

Таблица 22
Построение планов с помощью каталога

План $4^5//16$					Нерегулярный план K_1 $2^4 \times 3 \times 4^2//16$							Регулярный план K_2 $2^4 \times 3 \times 4^2//16$						
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	2	1	3	1	1	0	0	0	1	3	1	1	0	0	1	1	3
3	0	3	3	1	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	3	1
1	0	1	2	2	1	0	1	0	0	2	2	1	0	1	0	1	2	2
0	2	2	3	2	0	1	1	1	0	3	2	0	1	1	1	1	3	2
2	2	0	2	1	1	1	0	1	0	2	1	1	1	0	1	0	2	1
3	2	1	0	3	0	0	0	1	0	0	3	0	0	0	1	1	0	3
1	2	3	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	3	3	2	3	0	1	1	2	1	2	3	0	1	1	2	0	2	3
2	3	1	3	0	1	1	0	2	1	3	0	1	1	0	2	1	3	0
3	3	0	1	2	0	0	0	2	1	1	2	0	0	0	2	0	1	2
1	3	2	0	1	1	0	1	2	1	0	1	1	0	1	2	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
2	1	3	0	2	1	1	0	0	1	0	2	1	1	0	0	0	0	2
3	1	2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1	2	0
1	1	0	3	3	1	0	1	0	1	3	3	1	0	1	0	0	3	3

Теперь рассмотрим Раздел III каталога. Он содержит таблицы преобразований регулярных равномерных планов для получения различных регулярных и нерегулярных планов. Преобразования эти получены в работе [1]. Их описание см. в §1 главы 9. Регулярные планы получаются в том и только том случае, когда при преобразовании любого фактора в l новых факторов либо $l = 1$ либо (при $l > 1$) эффективность $\varphi = 1$. Эффективность полученного после преобразования плана можно вычислить по формуле (9.1.8).

Как пример использования этих преобразований рассмотрим способ получения факторного плана главных эффектов $2^4 \times 3 \times 4^2//16$ из регулярного плана главных эффектов $4^5//16$. Можно использовать следующие два варианта преобразований.

В первом варианте первый четырехуровневый фактор плана $4^5//16$ заменяем тремя двухуровневыми с помощью преобразования 2а; второй четырехуровневый фактор заменяем на двухуровневый и трехуровневый с помощью преобразования 3а:

2а **3а**

$$\left.\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{matrix}\right., \qquad \left.\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 0\\2 & 1\end{matrix}\right..$$

Третий четырехуровневый фактор плана $4^5//16$ вычеркиваем, а четвертый и пятый факторы оставляем без изменений. В результате таких преобразований получим факторный план $\mathbf{K}_1$ главных эффектов $2^4 \times 3 \times 4^2//16$ (средняя секция табл. 22). Поскольку преобразование 3а не является 100%-м ($\varphi < 1$), полученный план $2^4 \times 3 \times 4^2//16$ нерегулярен.

Можно, однако, построить регулярный план главных эффектов, используя второй вариант преобразований плана $4^5//16$. Первый, четвертый и пятый факторы этого плана преобразуем так же, как ранее. Второй четырехуровневый фактор заменяем трехуровневым в соответствии с преобразованием 3б. Третий четырехуровневый фактор заменяем двухуровневым в соответствии с преобразованием 2в. В результате получим регулярный, но не равномерный план $\mathbf{K}_2$ главных эффектов $2^4 \times 3 \times 4^2//16$ (последняя секция табл. 22).

Эффективность полученных планов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ можно вычислить по формуле (9.1.8). Детали вычислений даны ниже:

	k	n	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ
$\mathbf{K}_1$	13	4	4	4	–	4	4	1	0,60	–	1	1	0,83
$\mathbf{K}_2$	13	5	4	3	2	4	4	1	0,90	1	1	1	0,98

Далее мы приводим три раздела каталога: I. Вспомогательные матрицы; II. Регулярные равномерные планы; III. Оптимальные преобразования регулярных равномерных планов.

I. Вспомогательные матрицы

$$
\mathrm{D}_4 = \begin{array}{c} 123 \\ \left\| \begin{array}{c} 000 \\ 101 \\ 011 \\ 110 \end{array} \right\| \end{array}
\qquad
\mathrm{D}_8 = \begin{array}{c} 12345678 \\ \left\| \begin{array}{c} 00000000 \\ 10011011 \\ 01010112 \\ 11001103 \\ 00101113 \\ 10110102 \\ 01111001 \\ 11100010 \end{array} \right\| \end{array}
\qquad
\mathrm{D}_9 = \begin{array}{c} 1234 \\ \left\| \begin{array}{c} 0000 \\ 1011 \\ 2022 \\ 0112 \\ 1120 \\ 2101 \\ 0221 \\ 1202 \\ 2210 \end{array} \right\| \end{array}
$$

$$
\mathbf{D_{12}} = \begin{array}{r} 11111 \\ 12345678901234 \\ \left\| \begin{array}{c} 11011100010000 \\ 01101110001011 \\ 10110111000110 \\ 01011011100101 \\ 00101101110002 \\ 00010110111013 \\ 10001011011112 \\ 11000101101103 \\ 11100010110004 \\ 01110001011015 \\ 10111000101114 \\ 00000000000105 \end{array} \right\| \end{array}
\qquad
\mathbf{D_{16}} = \begin{array}{r} 111111111122 \\ 123456789012345678901 \\ \left\| \begin{array}{c} 000000000000000000000 \\ 100011100011101202131 \\ 010010011011011303312 \\ 110001111000110101223 \\ 001001010110111022324 \\ 101010110101010220215 \\ 011011001101100321036 \\ 111000101110001123107 \\ 000100101101111033230 \\ 100111001110010231301 \\ 010110110110100330122 \\ 110101010101001132013 \\ 001101111011000011114 \\ 101110011000101213025 \\ 011111100000011312206 \\ 111100000011110110337 \end{array} \right\| \end{array}
$$

$$
\mathbf{D}_{18} = \begin{array}{r}
\mathrm{111} \\
\mathrm{123456789012} \\
\left\| \begin{array}{c}
000000000000 \\
011111100111 \\
022222200222 \\
100121201120 \\
111202001201 \\
122010101012 \\
001022112210 \\
012100212021 \\
020211012102 \\
102201110003 \\
110012210114 \\
121120010225 \\
001210221123 \\
012021021204 \\
020102121015 \\
102112022213 \\
110220122024 \\
121001222105
\end{array} \right\|
\end{array}
\qquad
\mathbf{D}_{20} = \begin{array}{r}
\mathrm{1111111111} \\
\mathrm{1234567890123456789} \\
\left\| \begin{array}{c}
1100111101010000110 \\
0110011110101000011 \\
1011001111010100001 \\
1101100111101010000 \\
0110110011110101000 \\
0011011001111010100 \\
0001101100111101010 \\
0000110110011110101 \\
1000011011001111010 \\
0100001101100111101 \\
1010000110110011110 \\
0101000011011001111 \\
1010100001101100111 \\
1101010000110110011 \\
1110101000011011001 \\
1111010100001101100 \\
0111101010000110110 \\
0011110101000011011 \\
1001111010100001101 \\
0000000000000000000
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{r}
1111111111222222222\\
1234567890123456789012345678
\end{array}\\
\mathbf{D}_{24} = & \left\| \begin{array}{l}
1111101011001100101000000000\\
0111110101100110010100010011\\
0011111010110011001010001021\\
0001111101011001100101011030\\
0000111110101100110010100131\\
1000011111010110011001010120\\
0100001111101011001100101110\\
1010000111110101100110011101\\
0101000011111010110011000002\\
0010100001111101011001110013\\
1001010000111110101100101023\\
1100101000011111010110011032\\
0110010100001111101011000133\\
0011001010000111110101110122\\
1001100101000011111010101112\\
1100110010100001111101011103\\
0110011001010000111110100004\\
1011001100101000011111010015\\
0101100110010100001111101025\\
1010110011001010000111111034\\
1101011001100101000011100135\\
1110101100110010100001110124\\
1111010110011001010000101114\\
0000000000000000000000011105
\end{array} \right\|
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{l}
123456
\end{array}\\
\mathbf{D}_{25} = & \left\| \begin{array}{l}
000000\\
101111\\
202222\\
303333\\
404444\\
011234\\
112340\\
213401\\
314012\\
410123\\
022413\\
123024\\
224130\\
320241\\
421302\\
033142\\
134203\\
230314\\
331420\\
432031\\
044321\\
140432\\
241043\\
342104\\
443210
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & \begin{array}{r} \texttt{11111} \\ \texttt{12345678901234} \end{array} \\
\mathbf{D}_{27} = & \left\Vert \begin{array}{c}
\texttt{00000000000000} \\
\texttt{10011110011111} \\
\texttt{20022220022222} \\
\texttt{01012001112123} \\
\texttt{11020111120204} \\
\texttt{21001221101015} \\
\texttt{02021002221216} \\
\texttt{12002112202027} \\
\texttt{22010222210108} \\
\texttt{00100121211220} \\
\texttt{10111201222001} \\
\texttt{20122011200112} \\
\texttt{01112122020013} \\
\texttt{11120202001124} \\
\texttt{21101012012205} \\
\texttt{02121120102106} \\
\texttt{12102200110217} \\
\texttt{22110010121028} \\
\texttt{00200212122110} \\
\texttt{10211022100221} \\
\texttt{20222102111002} \\
\texttt{01212210201203} \\
\texttt{11220020212014} \\
\texttt{21201100220125} \\
\texttt{02221211010026} \\
\texttt{12202021021107} \\
\texttt{22210101002218}
\end{array} \right\Vert
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{c}
111111111122222222\\
123456789012345678901234567
\end{array}\\[1em]
\mathbf{D}_{28} = & \left\|\begin{array}{c}
101111000010001001110101101\\
110111000001100100011110110\\
011111000100010010101011011\\
000101111001010001101110101\\
000110111100001100110011110\\
000011111010100010011101011\\
111000101001001010101101110\\
111000110100100001110110011\\
111000011010010100011011101\\
010001001110101101101111000\\
001100100011110110110111000\\
100010010101011011011111000\\
001010001101110101000101111\\
100001100110011110000110111\\
010100010011101011000011111\\
001001010101101110111000101\\
100100001110110011111000110\\
010010100011011101111000011\\
110101101101111000010001001\\
011110110110111000001100100\\
101011011011111000100010010\\
101110101000101111001010001\\
110011110000110111100001100\\
011101011000011111010100010\\
101101110111000101001001010\\
110110011111000110100100001\\
011011101111000011010010100\\
000000000000000000000000000
\end{array}\right\|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 11111111112222222222333333333344 \\
 & 12345678901234567890123456789012345678901 \\
\mathbf{D}_{32} = & \left\| \begin{array}{l}
00000000000000000000000000000000000000000 \\
10000111100000011111100001111010220222311 \\
01000100011100011100011101110110102211122 \\
11000011111100000011111100001100322033233 \\
00100010010011010011011011101110011120224 \\
10100101110011001100111010010100231302135 \\
01100110001111001111000110011000113331306 \\
11100001101111010000100111100010333113017 \\
00010001001010101010110111011112212310010 \\
10010110101010110101010110100102032132301 \\
01010101010110110110101010101002310101132 \\
11010010110110101001001011010012130323223 \\
00110011011001111001101100110002203230234 \\
10110100111001100110001101001012023012125 \\
01110111000101100101110001000112301021316 \\
11110000100101111010010000111102121203007 \\
00001000100101100101101110111111121130110 \\
10001111000101111010001111000101301312201 \\
01001100111001111001110011001001023321032 \\
11001011011001100110010010110011203103323 \\
00101010110110110110110101010001130010334 \\
10101101010110101001010100101011310232025 \\
01101110101010101010101000100111032201216 \\
11101001001010110101001001011101212023107 \\
00011001101111001111011001100003333220100 \\
10011110001111010000111000011013113002211 \\
01011101110011010011000100010113231031022 \\
11011010010011001100100101101103011213333 \\
00111011111100011100000010001113322300324 \\
10111100011100000011100011110103102122035 \\
01111111100000000000011111111003220111206 \\
11111000000000001111111111000001300033117
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

$$\mathbf{D_{36}} = \begin{array}{c} 123456 \\ \left|\left\| \begin{array}{c} 000000 \\ 011101 \\ 211202 \\ 210303 \\ 101404 \\ 100505 \\ 210011 \\ 100110 \\ 101213 \\ 001315 \\ 011412 \\ 210514 \\ 101022 \\ 210125 \\ 200220 \\ 011324 \\ 010421 \\ 101523 \\ 001033 \\ 111134 \\ 100231 \\ 200330 \\ 210435 \\ 011532 \\ 210044 \\ 000143 \\ 011245 \\ 101342 \\ 100440 \\ 211541 \\ 111055 \\ 201152 \\ 010254 \\ 110351 \\ 201453 \\ 000550 \end{array} \right\|\right| \end{array}$$

$$\mathbf{D_{49}} = \begin{array}{c} 12345678 \\ \left|\left\| \begin{array}{c} 00000000 \\ 10111111 \\ 20222222 \\ 30333333 \\ 40444444 \\ 50555555 \\ 60666666 \\ 01123456 \\ 11234560 \\ 21345601 \\ 31456012 \\ 41560123 \\ 51601234 \\ 61012345 \\ 02246135 \\ 12350246 \\ 22461350 \\ 32502461 \\ 42613502 \\ 52024613 \\ 62135024 \\ 03362514 \\ 13403625 \\ 23514036 \\ 33625140 \\ 43036251 \\ 53140362 \\ 63251403 \\ 04415263 \\ 14526304 \\ 24630415 \\ 34041526 \\ 44152630 \\ 54263041 \\ 64304152 \\ 05531642 \\ 15642053 \\ 25053164 \\ 35164205 \\ 45205316 \\ 55316420 \\ 65420531 \\ 06654321 \\ 16065432 \\ 26106543 \\ 36210654 \\ 46321065 \\ 56432106 \\ 66543210 \end{array} \right\|\right| \end{array}$$

$$\mathbf{D}_{50} = \begin{array}{c} \begin{array}{r} 111 \\ 123456789012 \end{array} \\ \left|\left\| \begin{array}{c} 000000000000 \\ 001123411111 \\ 002241322222 \\ 003314233333 \\ 004432144444 \\ 010111112340 \\ 011234023401 \\ 012302434012 \\ 013420340123 \\ 014043201234 \\ 020222241302 \\ 021340102413 \\ 022413013024 \\ 023031424130 \\ 024104330241 \\ 030333342031 \\ 031401203142 \\ 032024114203 \\ 033142020314 \\ 034210431420 \\ 040444410432 \\ 041012321043 \\ 042130232104 \\ 043203143210 \\ 044321004321 \\ 100132403223 \\ 101200314334 \\ 102323220440 \\ 103441131001 \\ 104014042112 \\ 110243034143 \\ 111311440204 \\ 112434301310 \\ 113002212421 \\ 114120123032 \\ 120304121124 \\ 121422032230 \\ 122040443341 \\ 123113304402 \\ 124231210013 \\ 130410224211 \\ 131033130322 \\ 132101041433 \\ 133224402044 \\ 134342313100 \\ 140021333414 \\ 141144244020 \\ 142212100131 \\ 143330011242 \\ 144403422303 \end{array} \right\|\right| \end{array}$$

II. Регулярные равномерные планы

Планы мощности 2 (главных эффектов)

Симметричные планы

Номер плана	План	Способ построения: Вспомогательная матрица	Номера столбцов вспомогательной матрицы
1	$2^3//4$	$\mathbf{D}_4$	1-3
2	$2^7//8$	$\mathbf{D}_8$	1-7
3	$2^{11}//12$	$\mathbf{D}_{12}$	1-11
4	$2^{15}//16$	$\mathbf{D}_{16}$	1-15
5	$2^{19}//20$	$\mathbf{D}_{20}$	1-19
6	$2^{23}//24$	$\mathbf{D}_{24}$	1-23
7	$2^{27}//28$	$\mathbf{D}_{28}$	1-27
8	$2^{31}//32$	$\mathbf{D}_{32}$	1-31
9	$3^4//9$	$\mathbf{D}_9$	1-4
10	$3^{13}//27$	$\mathbf{D}_{27}$	1-13
11	$4^5//16$	$\mathbf{D}_{16}$	16-20
12	$5^6//25$	$\mathbf{D}_{25}$	1-6
13	$6^3//36$	$\mathbf{D}_{36}$	4-6
14	$7^8//49$	$\mathbf{D}_{49}$	1-8

Несимметричные планы

Номер плана	План	Способ построения: Вспомогательная матрица	Номера столбцов вспомогательной матрицы
15	$2^4 \times 4//8$	$\mathbf{D}_8$	1-3, 7, 8
16	$2^2 \times 6//12$	$\mathbf{D}_{12}$	12-14
17	$2^8 \times 8//16$	$\mathbf{D}_{16}$	4, 7, 9, 10, 12-15, 21
18	$2 \times 3^7//18$	$\mathbf{D}_{18}$	1-8
19	$3^3 \times 6//18$	$\mathbf{D}_{18}$	9-12
20	$2^3 \times 4 \times 6//24$	$\mathbf{D}_{24}$	24-28
21	$3^9 \times 9//27$	$\mathbf{D}_{27}$	3, 6-14
22	$2^6 \times 4^6 \times 8//32$	$\mathbf{D}_{32}$	18, 19, 21-23, 31-37, 41
23	$2^4 \times 4^9//32$	$\mathbf{D}_{32}$	3, 16, 19, 22, 32-40
24	$2^2 \times 6^3//36$	$\mathbf{D}_{36}$	2-6
25	$3 \times 6^3//36$	$\mathbf{D}_{36}$	1, 3-6
26	$2 \times 5^{11}//50$	$\mathbf{D}_{50}$	1-12

Планы мощности 3

Номер плана	План	Способ построения
27	$2^4//8$	Столбцы 1 – 3, 7 вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_8$
28	$2^8//16$	Столбцы 1 – 4, 11 – 14 вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{16}$
29	$2^{12}//24$	$\begin{Vmatrix} \mathbf{0}_{12} & \mathbf{D}_{12}(11) \\ \mathbf{I}_{12} & \mathbf{D}_{12}(11) \end{Vmatrix}$
30	$2^{16}//32$	Столбцы 1 – 5, 16 – 25, 31 вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{32}$
31	$2^{20}//40$	$\begin{Vmatrix} \mathbf{0}_{20} & \mathbf{D}_{20} \\ \mathbf{I}_{20} & \mathbf{D}_{20} \end{Vmatrix}$
32	$2^{24}//48$	$\begin{Vmatrix} \mathbf{0}_{24} & \mathbf{D}_{24}(23) \\ \mathbf{I}_{24} & \mathbf{D}_{24}(23) \end{Vmatrix}$
33	$3^4//27$	Столбцы 1 – 3, 10 вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_{27}$

* $\mathbf{0}_N$ и $\mathbf{I}_N$ – вектор-столбцы размерности N из нулей и единиц соответственно; $\mathbf{D}_N(N-1)$ – матрица, образованная первыми N – 1 столбцами вспомогательной матрицы $\mathbf{D}_N$.

Планы мощности 4

Номер плана	План	Способ построения	
		Вспомогательная матрица	Номера столбцов вспомогательной матрицы
34	$2^2//4$	$\mathbf{D}_4$	1, 2
35	$2^3//8$	$\mathbf{D}_8$	1-3
36	$2^5//16$	$\mathbf{D}_{16}$	1-4, 15
37	$2^6//32$	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 31
38	$3^2//9$	$\mathbf{D}_9$	1, 2
39	$3^3//27$	$\mathbf{D}_{27}$	1-3

Компромиссные планы

Номер плана	План	Оцениваемые эффекты взаимодействия	Способ построения	
			Таблица	Номера столбцов
40	$2^6//8$	F_{12}	$\mathbf{D}_8$	1-3, 5-7
41	$2^4//8$	F_{12}, F_{13}, F_{14}	$\mathbf{D}_8$	1-3, 6
42	$2^4//8$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_8$	1-3, 7
43	$2^{14}//16$	F_{12}	$\mathbf{D}_{16}$	1-4, 6-15
44	$2^{12}//16$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{16}$	1-7, 7, 9-15
45	$2^9//16$	F_{12}, F_{13}, F_{14} F_{23}, F_{24}, F_{34}	$\mathbf{D}_{16}$	1-4, 11-15
46	$2^8//16$	F_{12}, F_{13}, F_{14} $F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}$	$\mathbf{D}_{16}$	1-4, 8-10, 14
47	$2^{30}//32$	F_{12}	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 7-31
48	$2^{28}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 8, 9, 11-31
49	$2^{25}//32$	F_{12}, F_{13}, F_{14} F_{23}, F_{24}, F_{34}	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 9, 12, 14-31
50	$2^{21}//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{23}$ $F_{24}, F_{25}, F_{34}, F_{35}, F_{45}$	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 16-31
51	$2^{16}//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}$ $F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{34}$ $F_{35}, F_{36}, F_{45}, F_{46}, F_{56}$	$\mathbf{D}_8$	1-3, 5-7
52	$2^7//32$	$F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{45}$ $F_{46}, F_{47}, F_{56}, F_{57}, F_{67}$	$\mathbf{D}_8$	1-3, 6
53	$2^7//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{23}, F_{45}, F_{46}$ $F_{47}, F_{56}, F_{57}, F_{67}$	$\mathbf{D}_8$	1-3, 7
54	$2^{16}//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}$ $F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{1\,10}, F_{1\,11}$ $F_{1\,12}, F_{1\,13}, F_{1\,14}, F_{1\,15}, F_{1\,16}$	$\mathbf{D}_{16}$	1-4, 6-15
55	$2^9//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}$ $F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{23}, F_{24}$ $F_{25}, F_{26}, F_{27}, F_{28}, F_{29}$ $F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{38}, F_{39}$	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 15, 26, 27, 31
56	$2^7//32$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}$ $F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{27}, F_{34}$ $F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{45}, F_{46}, F_{47}$	$\mathbf{D}_{32}$	1-5, 26, 31
57	$3^{11}//27$	F_{12}	$\mathbf{D}_{27}$	1-3, 6-13
58	$3^7//27$	F_{12}, F_{13}, F_{23}	$\mathbf{D}_{27}$	1-3, 10-13
59	$3^5//27$	$F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}$	$\mathbf{D}_{32}$	1-3, 8, 9

III. Оптимальные преобразования регулярных равномерных планов

№1		0 0
		0 1
		1 0
а)	$2^2//3$	* * 67%
б)	$2//3$	* 89%
№2		0 1 1
		1 0 1
		1 1 0
		0 0 0
а)	$2^3//4$	* * * 100%
б)	$2^2//4$	* * 100%
в)	$2//4$	* 100%
№3		0 0
		0 1
		1 0
		2 1
а)	$3 \times 2//4$	* * 60%
б)	$3//4$	* 90%
№4		0 1 1 1
		1 0 1 1
		1 1 0 1
		1 1 1 0
		0 0 0 0
а)	$2^4//5$	* * * * 90%
б)	$2^3//5$	* * * 91%
в)	$2^2//5$	* * 93%
г)	$2//5$	* 96%
№5		0 0 0
		0 1 1
		1 0 1
		1 1 0
		2 0 0
а)	$3 \times 2^2//5$	* * * 75%
б)	$3 \times 2//5$	* * * 80%
в)	$3//5$	* * * 90%

№6		0 0
		0 1
		1 0
		1 2
		2 0
	$3^2//5$	* * 53%
№7		0 0
		0 1
		1 0
		2 0
		3 1
а)	$4 \times 2//5$	* * 57%
б)	$4//5$	* 91%
№8		0 1 0 1 1
		0 1 1 1 0
		1 1 0 1 0
		1 1 1 0 1
		0 0 0 0 0
		1 0 1 1 1
а)	$2^5//6$	* * * * * 83%
б)	$2^4//6$	* * * * 85%
в)	$2^3//6$	* * * 89%
г)	$2^2//6$	* * 92%
д)	$2//6$	* 100%
№9		0 0 0 0
		0 1 1 0
		1 1 0 0
		1 0 1 1
		2 0 1 0
		2 1 0 1
а)	$3 \times 2^3//6$	* * * * 83%
б)	$3 \times 2^2//6$	* * * * 95%
в)	$3 \times 2//6$	* * * * 100%
г)	$3//6$	* * * * 100%
№10		0 0 1
		1 0 0
		0 1 0
		2 1 1
		1 2 1
		2 2 0
а)	$3^2 \times 2//6$	* * * 82%
б)	$3^2//6$	* * 79%

№11 а) $4 \times 2^2//6$ б) $4 \times 2//6$ в) $4//6$	0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 2 0 0 3 1 1 * * * 67% * * 74% * 89%
№12 $4 \times 3//6$	0 0 0 1 0 2 1 0 2 1 3 2 * * 50%
№13 а) $5 \times 2//6$ б) $5//6$	0 0 0 1 1 0 2 0 3 1 4 1 * * 56% * 93%
№14 а) $2^6//7$ б) $2^5//7$	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 * * * * * * 78% * * * * * 81%

№14 (продолжение) в) $2^4//7$ г) $2^3//7$ д) $2^2//7$ е) $2//7$	1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 * * * * 86% * * * 91% * * 95% * 98%
№15 а) $3 \times 2^4//7$ б) $3 \times 2^3//7$ в) $3 \times 2^2//7$ г) $3 \times 2//7$ д) $3//7$	0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 2 0 1 0 1 2 0 0 0 0 2 1 0 1 1 * * * * * 83% * * * * 88% * * * 93% * * 95% * 96%
№16 а) $3^2 \times 2^2//7$ б) $3^2 \times 2//7$ в) $3^2//7$	0 0 0 1 0 1 0 0 0 2 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 2 0 1 0 2 2 0 1 * * * * 81% * * * 83% * * 82%
№17 $3^3//7$	0 2 2 1 2 1 2 2 0 0 1 0 2 1 2 2 0 1 1 0 0 * * * 75%

№18	0 1 0 1
	0 0 1 0
	1 1 0 0
	1 0 1 1
	2 0 0 0
	2 1 1 0
	3 1 0 1
а) $4 \times 2^3//7$	* * * * 70%
б) $4 \times 2^2//7$	* * * 81%
в) $4 \times 2//7$	* * 86%
г) $4//7$	* 91%
№19	0 0 1
	0 2 0
	1 0 0
	1 1 1
	2 1 0
	2 2 1
	3 2 0
а) $4 \times 3 \times 2//7$	* * * 68%
б) $4 \times 3//7$	* * 68%
№20	0 0
	1 0
	0 1
	2 1
	0 2
	3 2
	0 3
$4^2//7$	* * 47%

№21	0 1 0
	0 0 1
	1 0 0
	1 1 1
	2 0 1
	3 1 1
	4 1 0
а) $5 \times 2^2//7$	* * * 62%
б) $5 \times 2//7$	* * 71%
в) $5//7$	* 89%
№22	0 0
	0 1
	1 0
	1 2
	2 0
	3 0
	4 0
$5 \times 3//7$	* * 48%
№23	0 0
	0 1
	1 0
	2 0
	3 0
	4 1
	5 1
а) $6 \times 2//7$	* * 55%
б) $6//7$	* 94%

Литература

В.З.Бродский, В.С.Кузнецов (1976). Оптимальные преобразования регулярных планов главных эффектов, Заводская лаборатория, **42**, 422-426.

Приложение 2. Компьютерный алгоритм построения факторных планов

В этой главе описан компьютерный алгоритм [1] построения факторных планов, близких к Q-оптимальным, для заданной факторной модели, включающей главные эффекты двухуровневых и многоуровневых факторов и эффекты взаимодействия двухуровневых факторов. Алгоритм построения планов включает два базисных модуля и основан на комбинации аналитических методов, каталога базисных планов и численных процедур. Описываемый алгоритм включает также задачу разбиения планирования на блоки.

§ 1. Предварительные примеры

Известно большое число методов, приводящих к эффективным планам для различных типов факторных моделей. Однако если заданный способ построения плана реализовать сравнительно легко, то решить обратную задачу (а именно, задачу нахождения способа построения, приводящего к искомому плану) значительно труднее.

Рассмотрим два примера.

Пример А2.1.1. Пусть

$$x_1x_3x_4x_6, x_2x_3x_5x_7, x_1x_2x_3x_8, x_1x_2x_4x_9, x_1x_2x_5x_{10},$$
$$x_1x_5x_{11}, x_2x_3x_4x_{12}, x_1x_3x_5x_{13}, x_2x_4x_5x_{14} \qquad \text{(A2.1.1)}$$

будут генераторами геометрического плана $2^{14}//32$ для 14 двухуровневых факторов в 32 опытах.

Всякий, знакомый со способом построения геометрических планов, легко построит по заданным генераторам (А2.1.1) план и систему связанных множеств. Анализ этой системы показывает, что данный план невырожден (и, следовательно, обладает широким спектром оптимальности) для модели, включающей среднее, главные эффекты 14 факторов $F_1, \dots, F_{14}$, все двухфакторные эффекты взаимодействия факторов $F_3, \dots, F_7$ и еще три двухфакторных эффекта взаимодействия факторов F_1 и F_2, факторов F_{11} и F_{12} и факторов F_{13} и F_{14}. Пара главных эффектов двухуровневых факторов вместе с эффектом взаимодействия этих факторов эквивалентна эффектам уровней некоторого четырехуровневого фактора. Таким образом, можно вместо 14 двухуровневых факторов рассматривать 8 двухуровневых и три четырехуровневых факторов, из которых один примем за блоковый фактор (размер блока при этом будет равен 32/4 = 8), а два других – за некоторые качественные четырехуровневые факторы. Таким образом, геометрический план, задаваемый генераторами (A2.1.1), можно преобразовать в невырожденный план в четырех блоках (размером 8 каждый). Модель будет включать среднее, эффекты уровней двух качественных четырехуровневых факторов, эффекты уровней блокового четырехуровневого фактора, главные эффекты восьми двухуровневых факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия между первыми пятью из них.

Рассмотрим теперь обратную задачу, которая-то и возникает на практике. Пусть требуется оценить коэффициенты модели, включающей среднее, эффекты уровней двух качественных четырехуровневых факторов, главные эффекты восьми двухуровневых факторов и все двухфакторные эффекты взаимодействия между первыми пятью из них. При этом число экспериментов, которые можно провести в однородных условиях, не должно превышать восьми. Нахождение генераторов, которые приводят к невырожденному плану для заданной модели – весьма трудоемкая задача. Она представляет значительную трудность даже для специалистов, хорошо знакомых с теорией факторных планов.

Пример A2.1.2 Пусть требуется оценить коэффициенты модели главных эффектов в эксперименте, включающем пять количественных факторов и четыре качественных трехуровневых фактора. Пусть известно, что в однородных условиях может быть проведено не более четырех опытов. Построение эффективного плана для рассматриваемой модели можно выполнить, используя каталог регулярных равномерных планов и их оптимальные преобразования (см. главу 12).

Используем метод оптимальных преобразований для регулярного равномерного плана $2^6 \times 4^6 \times 8//32$ (см. план #22 раздела II Каталога). Из него можно легко получить план $2^5 \times 3^4 \times 8//32$ главных эффектов для пяти двухуровневых и четырех трехуровневых факторов в восьми блоках (размером четыре каждый) в 32 опытах. Для этого достаточно вычеркнуть один двухуровневый и два четырехуровневых фактора. Оставшиеся четырехуровневые факторы следует преобразовать оптимальным образом в трехуровневые. Эффективность полученного плана равна 94.0%. Однако нет уверенности, что выбранный исходный регулярный равномерный план и комбинация преобразований наилучшим образом подходят для данного случая. И действительно, из регулярного равномерного плана $3^9 \times 9//27$ (см. план #21 раздела II Каталога) можно легко построить нужный план, преобразуя пять трехуровневых факторов в двухуровневые. Полученный план имеет чуть большую эффективность (94,7%) при меньшем числе экспериментов (N=27). Кроме того, девятиуровневый фактор дает возможность разбить планирование на 9 блоков (размером три каждый). Для того чтобы убедиться, что последний план наилучший, нужно перебрать все регулярные планы и все допустимые преобразования, а это является очень трудоемкой задачей.

Таким образом, при построении факторных планов мы сталкиваемся с трудностью, часто непреодолимой без компьютера: среди большого числа способов построения факторных планов выбрать тот, который приводит (и наилучшим образом) к требуемому плану. Наиболее разумным в такой ситуации является создание разветвленного компьютерного алгоритма построения эффективных планов.

§ 2. Общие соображения и постановка задачи поиска

Применение общих численных методов для построения оптимальных планов целесообразно только для задач сравнительно небольшой размерности. И не столько потому, что для больших размерностей они приводят к большому времени счета, сколько потому, что они не дают факторную структуру планов, столь необходимую для ясного анализа результатов. Именно по этой причине для рассматриваемого здесь алгоритма была выбрана комбинация аналитических методов и численных процедур.

Описываемый алгоритм основан на критерии Q-оптимальности при выборе планов. Это объясняется тем, что он является наиболее удобным с вычислительной точки зрения критерий. С другой стороны, как это показано в работе [2] (где рассматривались критерии D-, E-, Q-оптимальности), для большинства практических ситуаций план, оптимальный в смысле одного критерия, близок к оптимальному и по другим критериям.

В результате применения описываемой процедуры нередко удается построить планы, являющиеся Q-оптимальными. Такими планами являются, например, геометрические планы. Это означает, что они будут оптимальны и в более широком смысле. В других случаях вместо Q-оптимальных планов строятся планы, близкие к Q-оптимальным. Тогда, как предполагается, они будут близки к оптимальным и в смысле других критериев.

Описываемый алгоритм предназначен для поиска планов для факторной модели, включающей главные эффекты количественных и/или качественных факторов, двухфакторные эффекты взаимодействия двухуровневых факторов, а также все эффекты взаимодействия внутри групп из трех двухуровневых факторов.

Задаваемая входная информация включает следующие данные:

1. Количество факторов и число их уровней.
2. Входящие в модель взаимодействия двухуровневых факторов.
3. Максимальное число экспериментов.
4. Размер максимального блока.

§ 3. Идея алгоритма

Генерируемые планы являются преобразованиями некоторого класса регулярных равномерных (негеометрических) планов (с числом экспериментов $N \leq 100$) или трех типов геометрических планов $2^n//16, 2^m//32, 2^q//64$.

Общая схема поиска плана на основе входной информации состоит в следующем.

Подсчитывается число степеней свободы для модели на основании формулы

$$v = k - r,$$

где k – число параметров модели, и r – число линейно независимых их связей (равенств типа (3.10.12)).

Для i-го плана из набора регулярных равномерных планов и (или) трех типов геометрических планов с числом экспериментов N_i $(v \leq N_i \leq N)$ ищется оптимальное преобразование, переводящее этот план в требуемый. Планы набора преобразуются в порядке возрастания величин N_i.

Алгоритмом предусматривается разбиение всех входных двухуровневых факторов на непересекающиеся множества, обладающие следующим свойством: в модели нет ни одного взаимодействия факторов из различных множеств. Такое множество называется минимальным, если его нельзя разбить на два множества с аналогичным свойством. Очевидно, что разбиение на минимальные множества единственно. В табл. 23 даны четыре типа минимальных множеств факторов. К пятому типу будем относить все другие (не вошедшие в табл. 23) минимальные множества.

Если модель содержит только минимальные множества 1-го типа, то преобразованиям подвергаются только негеометрические планы. Если в модель входит хотя бы одно множество 5-го типа, то преобразуются только геометрические планы. Если в модель не входит ни одно множество 5-го типа и входит хотя бы одно минимальное множество 2, 3 или 4-го типа, то преобразуются как геометрические, так и негеометрические планы.

Таблица 23
Минимальные множества факторов

Типы множеств	Факторы	Эффекты взаимодействия	Члены модели
1	F_1, F_2	F_{12}	Φ_1
2	F_1, F_2, F_3	F_{12}, F_{13}, F_{23}	Φ_2
3	F_1, F_2, F_3	F_{12}, F_{13}	Φ_3
	F_1, F_2, F_3	F_{12}, F_{13}, F_{14}	Φ_4
	F_1, F_2, F_3, F_4	F_{12}, F_{23}, F_{34}	Φ_5
4	F_1, F_2, F_3, F_4	$F_{12}, F_{23}, F_{34}, F_{14}$	Φ_6
	F_1, F_2, F_3, F_4	$F_{12}, F_{23}, F_{34}, F_{24}$	Φ_7

§ 4. Преобразования негеометрических планов

Пусть $\overline{\mathbf{D}}$ – регулярный равномерный план главных эффектов в N опытах для n факторов $F_1, \dots, F_n$ с числами уровней $s_1, \dots, s_n$ соответственно. Рассмотрим способ получения нового плана $\mathbf{D}$ для факторной модели M из плана $\overline{\mathbf{D}}$ для модели $\overline{M}$. Вместо фактора F_i (с числом уровней s_i) в плане $\overline{\mathbf{D}}$ будем рассматривать факторы $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ (с числами уровней $s_i^1, \dots, s_i^{m_i}$ соответственно) такие, что для одинаковых уровней F_i каждый из факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ имеет равные уровни и

$$1 + r + \sum_{j=1}^{m_i} (s_i^{(j)} - 1) = S_i \le s_i, \tag{A2.4.1}$$

где r – число двухфакторных эффектов взаимодействия двухуровневых факторов (из числа факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$), входящих в новую модель.

Таким образом, в результате указанной замены фактора F_i, каждому его уровню ставится в соответствие строка вспомогательного плана $\mathbf{D}_i$:

$$\begin{array}{c} F_i \\ \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ s_i - 1 \end{matrix} \right\| \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} F_i^1 & \dots & F_i^{m_i} \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} F_i^1(0) & \dots & F_i^{m_i}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_i^1(s_i - 1) & \dots & F_i^{m_i}(s_i - 1) \end{matrix} \right\| \end{array} = \mathbf{D}_i.$$

Это является более широким классом преобразований (по сравнению с §1 главы 9), который включает помимо главных эффектов также эффекты взаимодействия.

Будем говорить, что для фиксированного плана $\overline{\mathbf{D}}$ заданы

а) скелет преобразования, если для каждого фактора F_i с s_i уровнями плана $\overline{\mathbf{D}}$ заданы уровни $s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(m_i)}$ факторов $F_i^1, \dots, F_i^{m_i}$ при фиксированных их взаимодействиях плана $\mathbf{D}$ $(i = 1, \dots, n)$, то есть заданы соответствия

$$\begin{aligned} &s_1 \to s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(m_1)}; \\ &s_2 \to s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(m_2)}; \\ &\dots\dots\dots \\ &s_n \to s_n^{(1)}, \dots, s_n^{(m_n)}, \end{aligned} \tag{A2.4.2}$$

б) структура преобразования, если задан скелет преобразования и для каждого фактора F_i плана $\overline{\mathbf{D}}$ задан план $\mathbf{D}_i$ – i-я структура $(i = 1, \dots, n)$,

в) масштаб преобразования, если для каждого плана $\mathbf{D}_i$ для любых уровней факторов F_i^j $(j = 1, \dots, m_i)$ заданы значения соответствующих количественных переменных $X_i^{(j)}$.

Скелет преобразования (A2.4.2) будем называть допустимым, если выполняется неравенство (A2.4.1) и набор $s_1^{(1)},\ldots,s_1^{(m_1)},s_2^{(1)},\ldots,s_2^{(m_2)},\ldots,$ $s_n^{(1)},\ldots,s_n^{(m_n)}$ совпадает с точностью до переупорядочивания с входным набором чисел уровней факторов.

Пусть $\mathbf{D}^f$ – полный план в $N^f = s_1^{(1)} \ldots s_1^{(m_1)} \ldots s_n^{(1)} \ldots s_n^{(m_n)}$ опытах для факторов $F_1^1,\ldots,F_1^{m_1},\ldots,F_n^1,\ldots,F_n^{m_n}$; $\mathbf{D}_i^f$ – полный план в $n_i^f = s_i^{(1)},\ldots,s_i^{(m_i)}$ опытах для факторов $F_i^1,\ldots,F_i^{m_i}$. Таким образом, $N^f = \prod_{i=1}^n n_i^f$.

Из результатов §12 главы 3 следует, что дисперсия оценки регрессионной функции в точке полного плана $\mathbf{D}^f$ для модели M не зависит от типа этой модели (т. е. от качественной или количественной структуры факторов) и от значений, которые принимают переменные X_i в плане $\mathbf{D}$ (то есть от масштаба преобразования).

Обозначим через M_i факторную модель для плана $\mathbf{D}_i$, содержащую главные эффекты факторов $F_i^1,\ldots,F_i^{m_i}$ и двухфакторные эффекты взаимодействия некоторых из этих факторов с числами уровней 2 при условии выполнения неравенства (A2.4.1). Обозначим через σ_{ia}^2 среднюю дисперсию по точкам полного плана $\mathbf{D}_i^f$ для модели M_i и плана $\mathbf{D}_i$. Обозначим также через σ_a^2 среднюю дисперсию по точкам полного плана $\mathbf{D}^f$ для модели M главных эффектов и плана $\mathbf{D}$. Будем теперь выбирать допустимый скелет и структуру преобразования таким образом, чтобы минимизировать среднюю дисперсию σ_a^2. Из результатов §1 главы 9 следует, что для средней дисперсии σ_a^2 при заданных скелете и структуре преобразования справедливо равенство

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{N}\left(1 - n + \sum_{i=1}^n \sigma_{ia}^2 \, {}^{s_i}\!/_{\sigma^2}\right).$$

Отсюда следует, что минимум σ_a^2 достигается тогда и только тогда, когда обращаются в минимум σ_{ia}^2 для всех $i = 1,\ldots,n$. Это означает, что при заданном скелете преобразования задача получения оптимального плана $\mathbf{D}$ сводится к задаче получения оптимальных планов $\boldsymbol{D_i}$. Другими словами, задача получения оптимального плана $\mathbf{D}$ сводится к задаче получения оптимальных структур преобразования.

Так же, как и в §1 главы 9, функцию эффективности φ (эффективность плана), связанную с критерием средней дисперсии, будем представлять в виде отношения дисперсии ошибки эксперимента к средней дисперсии по точкам полного плана, нормированной на одно наблюдение и на один параметр:

$$\varphi = {}^{k\sigma^2}\!\Big/_{N\sigma_a^2},$$

где $k = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} S_i$. А эффективность плана $\mathbf{D}_i$ (или структуры $\mathbf{D}_i$)

$$\varphi_i = {S_i \sigma^2} \Big/ {s_i \sigma_a^2}\,. \tag{A2.4.3}$$

Эффективность плана **D** может быть выражена через эффективность каждого из планов $\mathbf{D}_i$, соответствующих плану **D**:

$$\varphi = k / (1 - n + \textstyle\sum_{i=1}^{n} S_i / \varphi_i). \tag{A2.4.4}$$

Эффективность плана

$$\varphi \leq 1. \tag{A2.4.5}$$

Для реализации описываемого алгоритма оптимальные структуры преобразований для факторов от трех до семиуровневых (без эффектов взаимодействия) главы 12 были пополнены оптимальными структурами преобразований для восьмиуровневых и девятиуровневых факторов. Были рассмотрены все возможные (удовлетворяющие неравенству (A2.4.1)) скелеты преобразований, включающие двухфакторные эффекты взаимодействия двухуровневых факторов для факторов от двух до девятиуровневых. Эти структуры являются оптимальными для любого равномерного регулярного плана и для любого выбора скелета преобразования.

Рассмотрим теперь задачу нахождения оптимального скелета преобразования плана $\overline{\mathbf{D}}$. Эта задача может быть сведена к задаче целочисленного линейного программирования введением для данного плана $\mathbf{D}_i$ параметра

$$\Delta_i = \left(\frac{\sigma_{ia}^2}{\sigma^2}\right) s_i - S_i.$$

Действительно, вследствие равенства (A2.4.3)

$$\varphi_i = S_i / (S_i + \Delta_i).$$

Отсюда, с учетом неравенства (A2.4.5), получим, что $\Delta_i \geq 0$. При этом $\Delta_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i = 1$. Вследствие равенства (A2.4.4)

$$\varphi = k / (k + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Delta_i).$$

Нахождение скелета, максимизирующего величину φ, эквивалентно нахождению скелета, минимизирующего величину

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}{k},$$

или просто величину

$$K = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

Занумеруем все используемые оптимальные структуры в порядке возрастания s_i. Пусть z_i – число структур с номером i в данном скелете преобразования (А2.4.2). Обозначим через $k_s^{(i)}$ количество s-уровневых факторов, получающихся после преобразования с i-й структурой. Для допустимого скелета преобразования

$$\sum_{i=1}^{l} k_s^{(i)} z_i = n_s^{\mathrm{inp}} \ (s = 2, \dots, 9), \qquad \text{(А2.4.6)}$$

где n_s^{inp} - число входных s-уровневых факторов, l – номер последней структуры.

Учет количества s-уровневых факторов n_s в преобразуемом плане приводит к неравенству

$$\sum_{i=l_{s-1}+1}^{l_s} z_i \le n_s \ (s = 2, \dots, 9), \qquad \text{(А2.4.7)}$$

где l_s – номер последней структуры для s-уровневого фактора ($l_1 = 0$).

Оптимальный скелет преобразования определяется минимизацией функционала

$$K = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{l} z_i \Delta_i.$$

Задача минимизации функционала K для заданного плана $\overline{\mathbf{D}}$ при ограничениях (А2.4.6) и (А2.4.7) является задачей линейного целочисленного программирования.

Оптимальный масштаб преобразования определяется при фиксированных скелете и структуре преобразования. Информационная матрица плана, получаемого преобразованием регулярного плана для модели главных эффектов, может быть приведена к блочно-диагональному виду. Поэтому задача нахождения оптимального масштаба преобразования сводится к задаче нахождения оптимального масштаба планов $\mathbf{D}_i$.

§ 5. Разбиение на блоки планов, производящихся из негеометрических

Задача разбиения плана на блоки возникает в случаях, когда в однородных условиях могут быть реализованы не более n^{inp} экспериментов. В таких случаях по существу имеется еще один фактор (блоковый).

Размер максимального блока определяется не только числом уровней блокового фактора s_{bl} и числом N, но также и тем, как часто встречаются все уровни блокового фактора F_{bl}. Последнее зависит от того, какая структура $\mathbf{D}_i$ использовалась для получения блокового фактора. При заданном числе строк s в $\mathbf{D}_i$ размер максимального блока определяется степенью равномерности распределения уровней блокового фактора. Так, например, если $(0\ 0\ 0\ 1\ 2)^T$ – столбец структуры $\mathbf{D}_i$, отвечающей блоковому фактору, то получим следующее распределение всех N опытов по трем блокам. Первый блок (отвечающий уровню 0) содержит $3N/5$ опытов, второй и третий блоки (отвечающие уровням 1 и 2 соответственно) содержат по $N/5$ опытов. Таким образом, размер максимального блока равен $3N/5$.

Легко видеть, что для столбца $(0\ 0\ 1\ 1\ 2)^T$ первый и второй блоки содержат по $2N/5$ опытов, а третий – $N/5$ опытов. Следовательно, размер максимального блока будет равен $2N/5$.

В случае наиболее равномерного распределения уровней блокового фактора размер максимального блока n_{max} может быть найден из равенства

$$n_{max} = -\frac{N}{s}\left[-\frac{s}{s_{bl}}\right], \qquad \text{(A2.5.1)}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

За небольшими исключениями, найденные оптимальные структуры позволяют выбрать для блокового фактора столбец с наиболее равномерным распределением уровней. Другими словами, большинство структур порождает разбиение на блоки с размером максимального блока, определяемым равенством (A2.5.1).

Исключения составляют некоторые структуры, например, $5 \times 3//7, 3^2 \times 2^3//8, 3^2 \times 2^2//8, 3^2 \times 2//8, 3^3 \times 2//8.$ В первом случае трехуровневый блоковый фактор приводит к максимальному размеру блока, равному $5N/7$. В остальных случаях двухуровневый блоковый фактор приводит к максимальному размеру блока, равному $5N/8$.

Таким образом, размер максимального блока является следующей функцией N, s, s_{bl} и типа структуры:

$$n_{max} = \begin{cases} 5N/7 \ \text{ при } s = 7, s_{bl} = 3 \text{ для структуры } 5 \times 3//7, \\ 5N/8 \ \text{ при } s = 8, s_{bl} = 2 \text{ для структуры } 3^2 \times 2^3//8, \\ \qquad\quad 3^2 \times 2^2//8, \ \ 3^2 \times 2//8, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\dfrac{N}{s}\left[-\dfrac{s}{s_{bl}}\right] \text{ в других случаях для } s, s_{bl} = 2, \dots, 9; s_{bl} \le s. \end{cases}$$

При фиксированных N и s_{bl} будем называть блоковыми те структуры $\mathbf{D}_i$, для которых

$$n_{max} \le n^{inp}. \qquad \text{(A2.5.2)}$$

Алгоритм разбиения на блоки заключается в следующем. Для данного N (для заданного регулярного равномерного плана $\bar{\mathbf{D}}$ фиксируем последовательно значения s_{bl}. Вводим качественный s_{bl}-уровневый блоковый фактор F_{bl}. По формуле (A2.5.2) выделяем множество блоковых структур и вводим дополнительное ограничение

$$\textstyle\sum_i z_i \ge 1, \qquad \text{(A2.5.3)}$$

где суммирование производится по всем блоковым структурам. После этого решается задача линейного целочисленного программирования с ограничениями (A2.4.6), (A2.4.7) и (A2.5.3) и находится оптимальный план, зависящий от пары величин (s_{bl}, N). Эта процедура повторяется для всех значений s_{bl}, для которых существует по крайней мере одна блоковая структура.

§ 6. Преобразования геометрических планов

Будем обозначать входную модель М через

$2^{n_2}, 3^{n_3}, \dots, 8^{n_8}, \Pi_1, \Pi_2 \dots,$

где

n_2 – общее число количественных переменных, для которых максимальная степень в модели равна 1, и двухуровневых качественных факторов;

n_3 – общее число количественных переменных, для которых максимальная степень в модели равна 2, и трехуровневых качественных факторов;

…

n_8 – общее число количественных переменных, для которых максимальная степень в модели равна 7, и восьмиуровневых качественных факторов;

$\Pi_1, \Pi_2 \dots$ – взаимодействия двухуровневых факторов.

Построение плана **D** для модели *M* осуществляется процедурой, которая разбивается на два этапа.

Этап 1. Построение вспомогательного регулярного равномерного плана $\bar{\mathbf{D}}$ для модели $\bar{M}$.

Этап 2. Оптимальное преобразование регулярного плана $\bar{\mathbf{D}}$ в план **D** для входной модели *M*.

На этапе 1 модель *M* сначала заменяется моделью $\bar{M}'$ с двухуровневыми, четырехуровневыми и восьмиуровневыми факторами и набором эффектов взаимодействия двухуровневых факторов. А затем модель $\bar{M}'$ заменяется моделью $\bar{M}$, где каждый четырехуровневый фактор заменяется двумя двухуровневыми факторами и их взаимодействием и каждый восьмиуровневый фактор заменяется тремя двухуровневыми факторами и всеми их взаимодействиями.

Так как в модели $\bar{M}$ присутствуют только двухуровневые факторы и их взаимодействия, регулярный равномерный план $\bar{\mathbf{D}}$ можно строить как геометрический план $2^n//2^k$ для некоторого заданного значения *k*. Рассмотрим более подробно процедуру построения геометрического плана $\bar{\mathbf{D}}$.

Множество точек искомого плана $\overline{\mathbf{D}}$ является подмножеством точек полного плана $\mathbf{D}^f$ в 2^n опытах. Координаты χ_i точек $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ этого подмножества удовлетворяют $n-k$ линейно независимым уравнениям с коэффициентами из поля $GF(2)$. Эти уравнения есть генерирующие соотношения. В плане $\mathbf{D}^f$ любой главный эффект или любой эффект взаимодействия определяется как контраст между двумя плоскостями некоторого пучка. При заданных определяющих соотношениях все пучки разделяются на связанные множества, порождающие совпадающие пучки в плане $\overline{\mathbf{D}}$. В работе [3] показано, что при заданных генераторах, выделяющих план $\overline{\mathbf{D}}$, существуют по одному представителю от каждого связанного множества такие, что некоторые фиксированные $n-k$ координат – нулевые. Верно и обратное: если неким главным эффектам и эффектам взаимодействия поставить в соответствие пучки с $n-k$ нулевыми координатами (например, последними), то существуют $n-k$ генерирующих соотношений, для которых наши эффекты окажутся в разных связанных множествах.

Таким образом, мы должны поставить в соответствие главным эффектам и эффектам взаимодействия пучки с нулевыми последними $n-k$ координатами так, чтобы всем главным эффектам и эффектам взаимодействия были поставлены в соответствие различные пучки хотя бы с одной ненулевой координатой. При этом пучок эффекта взаимодействия является суммой пучков соответствующих главных эффектов. Если это возможно, то существует искомый план $\overline{\mathbf{D}}$.

Опишем теперь алгоритм для получения такого соответствия. Чтобы сделать изложение более ясным, будем рассматривать эту задачу на примере. Переход к общему случаю не вызывает существенных затруднений.

Пусть имеется 10 двухуровневых факторов $F_1, \dots, F_{10}$. Нужно найти геометрический план $\overline{\mathbf{D}}$ в 2^4 опытах, то есть план $2^{10}//2^4$, такой, чтобы раздельно оценивались все 10 главных эффектов и 5 эффектов взаимодействия $F_{12}, F_{34}\ F_{56}\ F_{78}\ F_{9,10}$.

Поставим в соответствие главному эффекту фактора F_1 первый в лексикографическом порядке пучок $P(0\ 0\ 0\ 1)$ (для краткости не будем писать последние 6 нулей). Главному эффекту фактора F_2 поставим в соответствие второй по порядку пучок $P(0\ 0\ 1\ 0)$. Тогда эффекту взаимодействия факторов F_1 и F_2 будет поставлен в соответствие пучок $P(0\ 0\ 1\ 1)$.

Следующий свободный в лексикографическом порядке пучок $P(0\ 1\ 0\ 0)$ поставим в соответствие главному эффекту фактора F_3, а $P(1\ 0\ 0\ 0)$ – главному эффекту фактора F_4. Тогда эффекту взаимодействия факторов F_3 и F_4 будет поставлен в соответствие пучок $P(1\ 1\ 0\ 0)$.

Поставим в соответствие главному эффекту фактора F_5 следующий в лексикографическом порядке пучок, то есть $P(0\ 1\ 0\ 1)$. Тогда пучок, соответствующий главному эффекту фактора F_6, не может быть $P(0\ 1\ 1\ 0)$, ибо тогда эффекту взаимодействия факторов F_5 and F_6 будет соответствовать пучку $P(0\ 0\ 1\ 1)$, которому уже соответствует эффект взаимодействия факторов F_1 и F_2.

Первым по порядку подходящим для главного эффекта фактора F_6 будет пучок $P(1\ 0\ 1\ 0)$. Тогда эффект взаимодействия факторов F_5 и F_6 будет соответствовать пучку $P(1\ 1\ 1\ 1)$.

Если главный эффект фактора F_7 поставим в соответствие первому из оставшихся пучков, то есть $P(0\ 1\ 1\ 0)$, то первым подходящим для главного эффекта фактора F_8 будет пучок $P(1\ 0\ 1\ 1)$ и, соответственно, для эффекта взаимодействия факторов F_7 и F_8 – $P(1\ 1\ 0\ 1)$.

Точно таким же образом главный эффект фактора F_9 поставим в соответствие пучку $P(0\ 1\ 1\ 1), F_{10} - P(1\ 0\ 0\ 1)$ и эффект взаимодействия факторов F_9 и F_{10} – пучку $P(1\ 1\ 1\ 0)$.

На этом заканчивается работа алгоритма для рассматриваемого примера.

Однако не всегда дело обстоит так благополучно. Может возникнуть ситуация, когда главному эффекту некоторого фактора F_i нельзя поставить в соответствие никакой пучок. Тогда нужно вернуться к фактору F_{i-1} и сменить соответствие для его главного эффекта (на следующий по порядку пучок), а затем повторить процедуру для главного эффекта фактора F_i.

В общем случае мы должны поступать аналогичным образом. И в самом конце факторам, не образующим эффекты взаимодействия, надо поставить в соответствие оставшиеся пучки.

Аналогичный алгоритм использован в работе [4].

Наиболее удачная реализация описанного выше алгоритма была продемонстрирована автору этой книги И.Богуславским. Любая задача поиска генераторов для плана $2^q//64$ находила свое решение в течение доли секунды (на компьютерах до 2000 года). Это включало также наиболее сложный случай: компьютерное доказательство несуществования плана 4^3 x $8^7//64$. Что, кстати, подтверждает аналитический результат И.Богуславского (см. теорему 8.6.1). У И.Богуславского нет публикаций, описывающих эту компьютерную реализацию. Судя по всему, он никогда не использовал эту программу коммерчески или для каких-либо исследований.

Отметим здесь, что удачная реализация (в смысле времени расчета) построения геометрического плана существенна, поскольку в общем алгоритме эта часть используется многократно.

Разбиение на блоки планов, производящихся из геометрических, производится аналогично случаю негеометрических планов.

Более подробное описание представленного алгоритма можно найти в работе [1].

Литература

1. Бродский В.З., Бродский Л.И., Малолеткин Г.Н., Мельников Н.Н. (1978). О каталоге факторных планов эксперимента на ЭВМ. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента. Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 6-24.

2. Голикова Т.И., Панченко Л.А. (1975). Систематизация планов для оценки полиномиальных моделей второго порядка. В сб.: «Планирование оптимальных экспериментов». Изд-во Московского университета, 106-149.

3. Бродский Л.И. (1978). Некоторые теоремы о пучках параллельных плоскостей связанных множеств геометрических планов. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента. Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 6-24.

4. Greenfield, A.A. (1976). Selection if defining contrasts in two-level experiments. Appl. Statist., **25**, 64-67.

Библиография

Adams, G.L.A., Cintas, P.G., and Llabrés, X.T.-M.L. (2005). Experimentation order in factorial designs with 8 or 16 runs. *J. Appl. Statist*., **32**, 297–313.

Addelman, S. (1961). Irregular fractions of the 2^m factorial experiments. *Technometrics*, **3**, 479–496.

Addelman, S. (1962). Augmenting factorial plans to accommodate additional two-level factors. *Biometrics*, **18**, 308–322.

Addelman, S. (1962). Orthogonal main effect plans for asymmetrical factorial experiments. *Technometrics*, **4**, 21–46.

Addelman, S. (1962). Symmetrical and asymmetrical fractional factorial plans. *Technometrics*, **4**, 47–58.

Addelman, S. (1963). Techniques for constructing fractional replicate plans. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **58**, 45–71.

Addelman, S. (1964). Some two-level factorial plans with split plot confounding. T*echnometrics*, **6**, 253–258.

Addelman, S. (1965). The construction of a 2^{17-9} resolution V plan in eight blocks of 32. *Technometrics*, **7**, 439–443.

Addelman, S. (1972). Recent developments in the design of factorial experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 103–111.

Addelman, S. and Kempthorne, O. (1961). Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 1167–1176.

Adhikary, B. and Das, P. (1990). A study of efficiency of proportional frequency plans. *Sankhyā*, Ser. B, **52**, 338–342.

Aggarwal, M.L., Deng, L.-Y., and Mazumder, M.D. (2008). Optimal fractional factorial plans using finite projective geometry. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **37**, 1258–1265.

Agrawal, H. (1966). A method of construction of three factor balanced designs. *J. Indian Statist. Assoc*., **4**, 10–13.

Agrawal, V. and Dey, A. (1982). A note on orthogonal main effect plans for asymmetrical factorials. *Sankhyā*, Ser. B, **44**, 278–282.

Agrawal, V. and Dey, A. (1983). Orthogonal resolution IV designs for some asymmetrical factorials. *Technometrics*, **25**, 197–199.

Aigner, M. (1973). On the dual of tactical configurations and orthogonal arrays of index unity. *Sankhyā*, Ser. A, **35**, 221–228.

Anderson, D.A. and Federer, W.T. (1995). Representation and bounds for the general fractional factorial. *Commun. Statist. Theory Meth*., **24**, 363–373.

Anderson, D.A. and Srivastava, J.N. (1972). Resolution V designs of the 2^m x 3 series. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **34**, 377–384.

Anderson, D.A. and Thomas, A.M. (1979). Near minimal resolution IV designs for the s^n factorial experiment. *Technometrics*, **21**, 331–336.

Anderson, D.A. and Thomas, A.M. (1979). Resolution IV fractional factorial designs for the general asymmetric factorial. *Commun. Statist. Theory Meth*., **8**, 931–943.

Anderson, R.L. (1958). Complete factorials, fractional factorials and confounding. In: *Experimental Designs in Industry,* V.Chew, ed. New York: Wiley, 58–137.

Anderson-Cook, C.M. (2007). A modern theory of factorial design. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **102**, 765.

Atkinson, A.C. and Donev, A.N. (1996). Experimental designs optimally balanced for trend. *Technometrics*, **38**, 333–341.

Atsumi, T. (1983). A study of orthogonal arrays from the point of view of design theory. *J. Combin. Theory*, Ser. A, **35**, 241–251.

Bagchi, S. (2010). Main-effect plans orthogonal through the block factor. *Technometrics*, **52**, 243–249.

Bagiatis. C. (1990). E-optimal 2^k saturated designs. *Statistics*, **21**, 35–44.

Bailey, N.T.J. (1959). The use of linear algebra deriving prime power factorial designs with confounding and fractional replication. *Sankhyā*, **21**, 345–354.

Bailey, R.A. (1977). Patterns of confounding in factorial designs. *Biometrika,* **64**, 597–603.

Bailey, R.A. (1985). Balance, orthogonality and efficiency factors in factorial design. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **47**, 453-358.

Bailey, R.A. (1985). Factorial design and Abelian groups. *Linear Algebra Appl.*, **70**, 349–368.

Bailey, R.A. (1996). Orthogonal partitions in designed experiments. *Des. Codes Cryptogr.*, **8**, 45–77.

Bailey, R.A. (2011). Symmetric factorial designs in blocks. *J. Stat. Theory Pract.*, **5**, 13–24.

Bailey, R.A., Cheng, C.-S., and Kipnis, P. (1992). Construction of trend-resistant factorial designs. *Statist. Sinica*, **2**, 393–411.

Balasubramanian, K. and Dey, A. (1996). D-optimal designs with minimal and nearly minimal number of units. *J. Statist. Plann. Inference*, **52**, 255–262.

Banerjee, A.K. and Das, M.N. (1969). On a method of construction of confounded asymmetrical factorial designs. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **18**, 163–177.

Banerjee, K.S. (1970). Some observations of the White-Hultquist procedure for the construction of confounding plans for mixed factorial designs. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 1008–1013.

Banerjee, K.S. (1975). *Weighing Designs: For Chemistry, Medicine, Economics, Operations Research, Statistics*. Marcel Dekker, New York.

Banerjee, K.S. and Federer, W.T. (1963). On estimates for fractions of a complete factorial experiment as orthogonal linear combinations of the observations. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 1068–1078.

Banerjee, K.S. and Federer, W.T. (1964). Estimates of effects for fractional replicates. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 711–715.

Banerjee, K.S. and Federer, W.T. (1966). On estimation and construction in fractional replication. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1033–1039.

Banerjee, K.S. and Federer, W.T. (1967). On a special subset giving an irregular fractional replicate of a 2^n factorial experiment. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **29**, 292–299.

Banerjee, K.S. and Federer, W.T. (1968). On the structure and analysis of singular fractional replicates. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 657–663.

Bankövi, G. and Jarkadi, K. (1962). 5/9 replication of 3^n factorial experiment. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **7**, 509–536.

Barnard, M.M. (1936). An enumeration of the confounded arrangements in the 2×2×2×… factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Suppl., **3**, 195–202.

Beder, J.H. and Diestelkamp, W.S. (2009). Box-Hunter resolution in nonregular fractional factorial designs. *J. Stat. Theory Pract.*, **3**, 879–889.

Bierbrauer, J. (1993). Construction of orthogonal arrays. *J. Statist. Plann. Inference*, **56**, 207–221.

Birkes, D. and Dodge, Y. (1991). Optimal a x b connected designs with a + b observations. *Statist. Plann. Inference*, **28**, 49–59.

Bisgaard, S. (1994). A note on the definition of resolution for blocked 2^{k-p} designs. *Technometrics*, **36**, 308–311.

Blanchard, J.L. (1995). A construction for orthogonal arrays with strength t > 3. *Discrete Math.*, **137**, 35–44.

Block, R.M. and Mee, R.W. (2005). Resolution IV designs with 128 runs. *J. Qual. Tech.*, **37**, 282–293.

Blum, J.R., Schatz, J.A., and Seiden, E.(1970). On two levels of orthogonal arrays of odd index. *J. Combin. Theory*, **9**, 239–243.

Boob, B.S. and Agrawal, H.L. A note on the construction of mutually orthogonal Latin squares. *Biometrics*, **32**, 191–193.

Bose, R.C. (1938). On the application of properties of Galois fields to the problem of construction of hypergraecolatin squares. *Sankhyā*, **3**, 328–338.

Bose, R.C. (1947). Mathematical theory of the symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **8**, 107–166.

Bose, R.C. (1947). The maximum number of factors that can be accommodated in a symmetrical factorial experiment, when interactions up to a given order are left unconfounded. *Proc. 34th Indian Sci. Congr.*, III, 6–7.

Bose, R.C. (1950). Mathematics of factorial designs. *Proc. Internat. Conf. Mathematicians*, 1, 543–548.

Bose, R.C. (1960). On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95**, 191–209.

Bose, R.C. (1961). On some connections between the design of experiments and information theory. *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **38**, 257–271.

Bose, R.C. and Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 508–524.

Bose, R.C. and Connor, W.S. (1960). Analysis of fractionally replicated 2^m3^ndesigns. *Proc. I. S. I.*, **37**, 3–22.

Bose, R.C. and Kishen, K. (1940). On the problem of confounding in the general symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **5**, 21–36.

Bose, R.C. and Shrikhande, S.S. (1959). On the falsity of Euler's conjecture about the nonexistence of two orthogonal Latin squares of order. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45**, 734–737.

Bose, R. C., Shrikhande, S. S., and Parker, E. T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canadian J. Mathematics*, **12**, 189–203.

Bose, R.C. and Srivastava, J.N. (1964). Mathematical theory of factorial designs. *Bull. Internat. Statist. Inst.*, **40**, 780–794.

Bose, R.C. and Srivastava, J.N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions. *Sankhyā*, Ser. A, **26**, 145–168.

Bose, R.C. and Srivastava, J.N. (1964). Analysis of irregular factorial fractions. *Sankhyā*, Ser. A, **26**, 117–144.

Bose, R.C., and Srivastava, J.N. (1964). On a bound useful in the theory of factorial designs and error correcting codes. Ann. Math. Statist., 35, 408–414.

Box, G.E.P. (1966). A note on augmented designs. Technometrics, 8, 184–188.

Box, G.E.P and Hunter, J.S. (1961). The $2^{к-р}$ fractional factorial designs, Part 1. Technometrics, **3**, 311-351.

Box, G.E.P and Hunter, J.S. (1961). The $2^{к-р}$ fractional factorial designs, Part 2. Technometrics, **3**, 449–458.

Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (2000). The 2^{k-p} fractional factorial designs Part I. *Technometrics*, **42**, 2000, 28–47.

Box, G.E.P., Hunter, J.S., and Hunter, W.G. (2005). *Statistics for Experimenters,* 2nd ed. New York: Wiley.

Box, G.E.P. and Wilson, K.B. (1951). On the experimental attainment of optimum condition. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **13**, 1–45.

Brouwer, A.E. (1984). Four MOLS of order 10 with a hole of order 2. *J. Statist. Plann. Inferences*, **10**, 203–205.

Brownlee, K.A., Kelly, B.K., and Laraine, P.K. (1948). Fractional replication arrangements for factorial experiments with factors at two levels. *Biometrika*, **35**, 268–282.

Brugger, R.M. (1992). How to construct fractional factorial experiments. *Technometrics,* **34**, 492–493.

Bullington, K.E., Hool, J.N., and Maghsoodloo, S. (1990). A simple method for obtaining resolution IV designs for use with Taguchi orthogonal arrays. *J. Qual. Tech.*, **22**, 260-264.

Burgess, L. and Street, D.J. (1994). Algorithms for constructing orthogonal main effect plans. *Utilitas Math.*, **46**, 33–48.

Bush, K.A. (1952). Orthogonal arrays of index unity. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 426–434.

Calinski, T. (1972). On non-orthogonal experiments. *Biometrische Z.*, **14**, 73–84.

Causey, B.D. (1968). Some examples of multi-dimensional incomplete block designs. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1577–1590;

Chacko, A. and Dey. A. (1981). Some orthogonal main effect plans for asymmetrical factorials. *Sankhyā*, Ser. B, **43**, 384–391.

Chacko, A., Dey, A., and Ramakrishna, G.V.S. (1979). Orthogonal main effect plans for asymmetrical factorials. *Technometrics*, **21**, 269–270.

Chadjiconstantinidis, S., Cheng, C.-S., and Moyssiadis, C. (1989). Construction of optimal fractional factorial resolution V designs with N ≡ 2 (mod 16) observation. *J. Stat. Plann. Inference*, **23**, 153–161.

Chadjipantelis, T and Kounias, S. (1985). Supplementary difference sets and D-optimal designs for n ≡ 2 (mod 4). *Discrete Math.*, **57**, 211–216.

Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankhyā*, **17**, 143–164.

Chakravarti, I.M. (1958). Simplified proofs some results in the theory of optimal designs. *Sankhyā*, **19**, 189–194.

Chakravarti, I.M. (1963). Orthogonal and partially balanced arrays and their application in design of experiments. *Metrika*, **7**, 231–243.

Chakravarty, R. and Dey, A. (1976). On the construction of balanced and orthogonal arrays. *Canad. J. Statist.*, **4**, 109–117.

Chang, C.-T. And Cheng, J. (1990). Three-factor symmetrical balanced designs with full efficiency for main effects. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **19**, 4757–4772.

Chang, F.-K. and Ting, C.-P. (2011). Optimal two-level fractional factorial designs for location main effects with dispersion factors. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **40**, 2035–2043.

Chatterjee, K., Evangelaras, H., and Koukouvinos, C. (2011). A lower bound to the measure of optimality for main effect plans in the symmetric factorial experiments. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **13**, 2358–2365.

Chatterjee, K. and Mukerjee, R. (1993). D-optimal saturated main effect plans for $2 \times s^2 \times s^3$ factorials. *J. Comb. Inf. System Sci.*, **8**,116–122.

Chatterjee, S.K. (1982). Some recent developments in the theory of asymmetric factorial experiments – A review. *Sankhyā,* Ser. A, **44**, 103–113.

Chauhan, C. and Dean, A. (1985). On orthogonality in factorial experiments. *Biometrics,* **41**, 325-325.

Chen, H. and Cheng, C.S. (1999). Theory of optimal blocking of 2^{n-m} designs. *Ann. Statist.*, **27**, 1948 1973.

Chen, H. and Hedayat, A.S. (1996). 2^{n-1} designs with weak minimum aberration. *Ann. Statist.*, **24**, 2536–2548.

Chen, H. and Hedayat, A.S. (1998). 2^{n-m} designs with resolution III or IV containing clear two-factor interactions. *J. Statist. Plann. Inference*, **75**, 147–158.

Chen, J. (1992). Some results on 2^{n-k} fractional factorial designs and search for minimum aberration designs. *Ann. Statist.*, **20**, 2124–2141.

Chen, J. (1998). Intelligent search for 2^{13-6} and 2^{14-7} minimum aberration designs. *Statist. Sinica*, **8**, 1265–1270.

Chen, J., Sun, D.X., and Wu, C.F.J. (1993). A catalogue of two-level and three-level fractional factorial designs with small runs. *Internat. Statist. Rev.*, **61**, 131–145.

Chen, J. and Wu, C.F.J. (1991). Some results on s^{n-k} fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments. *Ann. Statist.*, **19**, 1028–1041.

Chen, M.H. and Wang, P.C. (2001). Multi-level factorial designs with minimum numbers of level changes. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **30**, 875–885.

Cheng. C.-S. (1978). Optimality of certain asymmetrical experimental designs. *Ann. Statist.*, **6**, 1239–1261.

Cheng, C.-S. (1980). Optimality of some weighing and 2^n fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **8**, 436–446.

Cheng, C.-S. (1980). Orthogonal arrays with variable numbers of symbols. *Ann. Statist.*, **8**, 447–453.

Cheng, C.-S. (1989). Some orthogonal main effect plans for asymmetrical factorials. *Technometrics*, **31**, 475–477.

Cheng. C-S. (1990). Construction of run orders of factorial designs. In *Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments,* S.Ghosh, ed. New York: Marcel Dekker, 423–439.

Cheng, C.-S. (1995). Some projection properties of orthogonal arrays. *Ann. Statist.*, **23**, 1223–1233.

Cheng, C.S., Chi, S.W., and Masaro, J.C. (1985). Optimal weighing designs. *SIAM J. Alg. Disc. Meth*, **6**, 259-267.

Cheng. C.-S. and Jacroux, M. (1988). The construction of trend-free run orders of two-level factorial designs. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**, 1152–1158.

Cheng, C-S, and Li, C.C. (1993). Constructing orthogonal fractional factorial designs when some factor level combinations are debarred. *Technometrics*, **35**, 277–283.

Cheng, C.-S., Masaro, J.C., and Wong, C.S. (1985). Optimal weighing designs. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, **6**, 259–267.

Cheng, C.-S. and Mukerjee, R. (1998). Regular fractional factorial designs with minimum aberration and maximum estimation capacity. *Ann. Statist.*, **26**, 2289–2300.

Cheng, C.-S. and Mukerjee, R. (2001). Blocked regular fractional factorial designs with maximum estimation capacity. *Ann. Statist.*, **29**, 530–548.

Cheng, C.-S. and Steinberg, D.M. (1991). Trend robust two-level factorial designs. *Biometrika*, **78**, 325– 336.

Cheng, C.-S., Steinberg, D.M., and Sun, D.X. (1999). Minimum aberration and model robustness for two-level fractional factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **61**, 85–93.

Cheng, C.-S. and Tang, B. (2005). A general theory of minimum aberration and its applications. *Ann. Statist.*, **33**, 944–958.

Cheng, S.W. and Wu, C.F.J. (2002). Choice of optimal blocking schemes in two-level and three-level designs. *Technometrics*, **44**, 269–277.

Cheng, S.W. and Ye, K.Q. (2004). Geometric isomorphism and minimum aberration for factorial designs with quantitative factors. *Ann. Statist.*, **32**, 2168–2185.

Chitturi, P. And John, P.W.M. (2002). Nesting optimal main effect plans and optimal foldover designs. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 31, 1777–1794.

Chopra, D.V. and Srivastava, J.N. (1973). Optimal balanced 2^7 fractional factorial designs of resolution V, with N < 42. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 587–604.

Chopra, D.V. and Srivastava, J.N. (1973). Optimal balanced 2^7 fractional factorial designs of resolution V, 49 < N < 55. *Commun. Statist. Theory Meth*., **2**, 59–84.

Chopra, D.V. and Srivastava, J.N. (1974). Optimal balanced 2^8 fractional factorial designs of resolution V, 37 < N < 51. *Sankhyā*, Ser. A, **36**, 41–52.

Chopra, D.V. and Srivastava, J.N. (1975). Optimal balanced 2^7 fractional factorial designs of resolution V, 43 < N < 48. *Sankhyā*, Ser. B, **37**, 429–447.

Chowdhury, S.R. (2004). Catalogue of group structures for three-level fractional factorial designs. *J. Appl. Statist.*, **31**, 435–444.

Clarke, G.M. (1967). Four-way balanced designs based on Youden Squares with 5, 6 or 7 treatments. *Biometrics*, **23**, 803–812.

Cochran, W.G. and Cox, G.M. (1957). *Experimental designs*. New York: Wiley.

Colboum, C.J. (ed.) and Dinitz, J.H. (ed.) *(2007). Handbook of Combinatorial Designs* (Discrete Mathematics and Its Applications), Second Edition. Chapman and Hall/CRC.

Collomhier, D. (1988). Optimality of some fractional factorial designs. In *Optimal Design and Analysis of Experiments,* Y.Dodge et al., eds. Amsterdam, North-Holland, 39–45.

Collombier, D. (1992). Generally optimal main-effect fractions of u x v designs with u + v units. *Comput. Statist. Data Anal.*, **14**, 333–342.

Collombier, D. (1996). *Plans d'Exp´erience Factoriels*. Springer-Verlag, Berlin.

Cornell, J.A. (1990). Embedding mixture experiments inside factorial experiments. *J. Qual. Tech.*, **22**, 265-276.

Connor, W.S. (1960). Construction of fractional factorial designs of the mixed 2^m3^n series. *Contrib. Probability and Statist.*, Stanford, Calif., Univ. Press, 168–181.

Connor, W.S. (1960). Fractional factorial experiment designs of mixed 2^m3^n series. *Industr. and Engng. Chem.*, **52**, 69A–71A.

Connor, W.S. and Young, S. (1961). Fractional factorial designs for experiments with factors of two and three levels. *Nat. Bureau Standards, Appl. Math. Series*, **58**, 65 pp.

Connor, W.S. and Zelen, M. (1959). Fractional factorial experiment designs for factor of three levels. *Nat. Bureau Standards, Appl. Math. Series*, **54**, 37 pp.

Copper. B.E. (1968). The extension of Yates' 2n algorithm to any complete factorial experiment. *Technometrics*, **10**, 575–577.

Coster, D.C. (1993). Tables of minimum cost, linear trend-free ran sequences for two- and three-level fractional factorial design. *Comput. Statist. Data Anal.*, **16**, 325–336.

Coster, D.C. (1993). Trend-free run orders of mixed-level fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **21**, 2072–2086.

Coster, D.C and Cheng, C.-S. (1988). Minimum cost trend-free run orders of fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **16**, 1188–1205.

Cotter, S.C. (1974). A general method of confounding for symmetrical factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **36**, 267–276.

Cotter, S.C., John, J.A., and Smith, T.M.F. (1967). Multi-factor experiments in non-orthogonal designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **29**, 361–367.

Cox. D. R. (1958). *Planning of Experiments*. New York: Wiley.

Daniel, C. (1958). On varying one factor at a time. *Biometrics*, **14**, 430–431.

Daniel, C. (1959). Use of half-normal plots in interpreting factorial two-level experiments. *Technometrics*, **1**, 311–341.

Daniel, C. (1960). Parallel fractional replicates. *Technometrics*, **2**, 263–268.

Daniel, C. (1962). Sequences of fractional replicates in the 2^{p-q} series. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **57**, 403–429.

Daniel, C. (1973). One-at-a-time plans. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **68**, 353–360.

Daniel, C. and Wilcoxon, F. (1966). Factorial 2^{p-q} plans robust against linear and quadratic trends. *Technometrics*, **8**, 259–278.

Das, M.N. (1964). A somewhat alternative approach for construction of symmetrical factorial designs and obtaining maximum number of factors. *Calcutta Statist Assoc. Bull.*, **13**, 1–17.

Das, M.N. and Rao, P.S. (1967). Construction and analysis of some new series of confounded asymmetrical factorial designs. *Biometrics*, **23**, 813–822.

Das, M.N., Sukla, G.K., and Kartha, C.P. (1967). On a method of construction of symmetrical fractional factorials and related error correcting codes. *Calcutta Statist Assoc. Bull.*, **16**, 164–179.

Dawson, J.E. (1985). A construction for generalized Hadamard matrices GH(4q, EA(q)). J. Statist. Plann. Inference, 11, 103–110.

De Caen, D. and Gregory, D.A. (1988). Factorizations of symmetric designs. *J. Combin. Theory*, Ser. A, **49**, 323-337.

De Launey, W. (1986). A survey of generalized Hadamard matrices and difference matrices D(k, λ; G) with large k. *Utilitas Math.*, **30**, 5–29.

Deng, L.-Y. (2000). Orthogonal arrays: theory and applications. *Technometrics*, **42**, 440.

Deng, L.Y. and Tang, B. (1999). Generalized resolution and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other nonregular factorial designs. *Statist. Sinica*, **9**, 1071–1082.

Dey, A, (1985). *Orthogonal Fractional Factorial Designs*, Halsted Press, New York.

Dey, A. (1986), *Theory of Block Designs*, Halsted Press, New York.

Dey, A. (1993). Some orthogonal arrays with variable symbols. *J. Combin. Inform. System Sci.*, **18**, 209–215.

Dey, A. and Agrawal, V. (1985). Orthogonal fractional plans for asymmetrical factorials derivable from orthogonal arrays. *Sankhyā*, Ser. B, **47**, 56–66.

Dey, A. and Midha, C.K. (1996). Construction of some asymmetrical orthogonal arrays. *Statist. Probab. Lett.*, **28**, 211–217.

Dey, A. and Mukerjee, R. (1998). Techniques for constructing asymmetric orthogonal arrays, *Inf. System Sci.*, **23**, 351–366.

Dey, A. and Mukerjee, R. (1999). *Fractional Factorial Plans*. New York: Wiley.

Dey, A. and Ramakrishna, G.V.S. (1977). A note on orthogonal main effect plans. *Technometrics*, **19**, 511–512.

Dey, A. and Saha, G.M. (1970). Main effect plans for k^n factorials with blocks. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **22**, 381–388.

Dickinson, A.W. (1974). Some run orders requiring a minimum number of factor level changes for the 2^4 and 2^5 main effect plans. *Technometrics*, **16**, 31–37.

Dong, R. (1993). On the identification of active contrasts in unreplicated fractional factorials. Statist. Sinica, 3, 209–217.

Draper, N.R. and Lin, D.K.J. (1990). Connections between 2-level designs of resolution III * and V. *Technometrics*, **32**, 283-288.

Draper, N.R. and Lin, D.K.J. (1990). Capacity considerations for two-level fractional factorial designs. *J. Statist. Plann. Inference*, **24**, 25–35.

Draper, N.R. and Mitchell, T.J. (1967). The construction of saturated 2^{k-p} designs. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1110–1126.

Draper, N. R. and Mitchell, T.J. (1968). Construction of the set of 256-run designs of resolution ≥ 5 and the set of even 512-run designs of resolution ≥ 6 with special reference to the unique saturated designs. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 246–255.

Draper, N.R. and Stoneman, D.M. (1964). Estimating missing values in unreplicated two-level factorial and fractional factorial designs. *Biometrics*, **20**, 443–458.

Draper, N.R. and Stoneman, D.M. (1968). Factor changes and linear trends in eight-run two-level factorial designs. *Technometrics*, **10**, 301–311.

Dulmage, A.L., Johnson, D.M., and Mendelson, N.S. (1961). Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares, 1. *Canad J. Math.*, **13**, 356–372.

Dykstra, O. (1959). Factorial designs for seven two-level factors in 32 runs. *Trans. All-day Conf. on Quality Control and Statistics in Industry*, Rutgers Univ., September 12.

Dykstra, O. (1959). Partial duplication of factorial experiments. *Technometrics*, **1**, 63–75.

Ehlich, H. and Zellen, H. (1962). *Binare Matrizen. Z. Angew. Math. Mech.*, **42**, 20–21.

Ehrenfeld, S. (1953). On the efficiency of experimental designs. *Ann. Math. Statist.*, **26**, 247–255.

Ehrenfeld, S. and Zacks, S. (1961). Randomization and factorial experiments. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 270–297.

Ehrenfeld, S. and Zacks, S. (1963). Optimum strategies in factorial experiments. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 780–791.

Ehrenfeld, S. and Zacks, S. (1967). Testing hypotheses in randomized factorial experiments. Ann. Math. Statist., 38, 1494–1507.

El Mossadeq, A, and Kobilinsky, A. (1992). Run orders and quantitative factors in asymmetrical designs. *Appl. Stochastic Models Data Anal.*, **8**, 259–281.

El-Helbawy, A.T. and Ahmed, E.A. (1984). Optimal design results for 2^n factorial paired comparison experiments. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **13**, 2827–2845.

Euler, L. (1782). Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Opera Omnia*, Ser. I, **7**, 291–392.

Farmakis, N. (1992). On constructability of A-optimal weighing designs (n, k, 5) when n ≡ 3 (mod 4) and k = n - 1, n. J. Statist. Plann. Inference, 33, 275–283.

Federer, W.T. and Mandeli, J.P. (1986). Orthogonal F-rectangles, orthogonal arrays, and codes. *J. Combin. Theory,* Ser. A, **43**, 149-164.

Filliben, J.J. and Li, K.C. (1997). A systematic approach to the analysis of complex interaction patterns in two level factorial designs. *Technometrics*, **39**, 286–297.

Finney, D.J. (1945). Some orthogonal properties of the 4 x 4 and 6 x 6 Latin squares. *Ann. Eugenics*, **12**, 213–219.

Finney, D.J. (1945). The fractional replication of factorial experiments. *Ann. Eugenics*, **12**, 291–331.

Finney, D.J. (1946). Orthogonal partitions of the 5 x 5 Latin squares. *Ann. Eugenics*, **13**, 1–3.

Finney, D.J. (1946). Orthogonal partitions of the 6 x 6 Latin squares. *Ann. Eugenics*, **13**, 184–196.

Finney, D.J. (1946). Recent developments in the designs of field experiments. III. Fractional replication. *J. Agric. Sci.*, **36**, 185–191.

Finney, D.J. (1969). *An Introduction to the Theory of Experimental Design*. Chicago: The University of Chicago Press.

Finney, D. J, (1982). Some enumerations for the 6 x 6 Latin squares. *Utilitas Math.*, **21**, 137–153.

Fisher, R.A. (1942). The theory of confounding in factorial experiments in relation to the theory of group. *Ann. Eugenics*, **11**, 341–353.

Fisher, R.A. (1945).A system of confounding for factors with more than two alternatives giving completely orthogonal cubes and higher powers. *Ann. Eugenics*, **12**, 283–290.

Fontana, R. and Pistone, G. (2010). 2-level fractional factorial designs which are the union of non trivial regular designs. *J. Stat. Theory Pract.*, **4**, 181–202.

Fontana, R., Pistone, G., and Rogantin, M.P. (2000). Classification of two-level factorial fractions. *J. Statist. Plann. Inference*, **87**, 149–172.

Fractional factorial experiment designs for factor at two levels. (1957). *National Bureau Standards, Appl. Math. Series.*, **48**, 85 p.

Franklin, M.F. (1984). Constructing tables of minimum aberration p^{n-m} designs. *Technometrics*, **26**, 225–232.

Franklin, M.F. (1985). Selecting defining contrasts and confounded effects in p^{n-m} factorial experiments. *Technometrics*, **27**,165–172.

Franklin, M.F. and Bailey, R.A. (1977). Selection of defining contrasts and confounded effects in two-level experiments. *Appl. Statist.*, **26**, 321–326.

Freeman, G.H. (1966). Some non-orthogonal partitions of 4 x 4, 5 x 5 and 6 x 6 Latin squares. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 666–681.

Fries, A. and Hunter, W.G. (1980). Minimum aberration 2^{k-p} designs. *Technometrics*, **22**, 601–608.

Fry, R.E. (1961). Finding new fractions of factorial experimental designs. *Technometrics*, **3**, 359–370.

Fujii, Y. (1976). An upper bound of resolution in asymmetrical fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **4**, 662–667.

Galil, Z. and Kiefer, J. (1980). D-optimum weighing designs. *Ann. Statist.*, **8**, 1293–1306.

Galil, Z. and Kiefer, J. (1982). Construction methods for D-optimum weighing designs when $n \equiv 3 \pmod 4$. Ann. Statist., 10, 502–510.

Ghosh, S. (1996). Sequential assembly of fractions in factorial experiments. In *Handbook of Statistics*, S.Ghosh and C.R.Rao, eds., **13**. Amsterdam: North-Holland, 407–435.

Ghosh, S. and Kipngeno, W.A.K. (1985). On the robustness of the optimum balanced 2^m factorial designs of resolution V (given by Srivastava and Chopra) in the presence of outliers. *J. Statist. Plan. Inference,* **11**, 119-129.

Gilmour, S.G. and Mead, R. (1996). Fixing a factor in the sequential design of two-level fractional factorial experiments. *J. Appl. Statist.*, **23**, 21–30.

Goswami, K.K. and Pal, S. (1992). On the construction of orthogonal factorial designs of resolution IV. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **21**, 3561–3570.

Gravett I.M. (1971). A two-thirds replicate of a 34 factorial. Biometrics, 27, 1043–1055.

Groggel, D.J. and Skillings, J.H. (1986). Distribution-free tests for main effects in multifactor designs. American Statistician, **40**, 99-102.

Guest, P.G. (1958). The spacing of observations in polynomial regression. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 294–299.

Gulati, B.R. (1971). Orthogonal arrays of strength five. *Trab. Estadist. y Univ. Oper.*, **22**, 51–77.

Gulati, B.R. and Kounias, E.G. (1970). On bounds useful in the theory of symmetrical factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **32**, 123–133.

Gupta, B.C. (1991). Some results on main effect plus one plans for 2^m factorials. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **20**, 2955–2963.

Gupta, B.C. (1992). On the existence of main effect plus k plans for 2^m factorials and tables for main effect plus 1 and 2 plans for 2^7 factorials. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **21**, 1137–1143.

Gupta, B.C. and Carvajal, R.S.S. (1984). A necessary condition for the existence of main effect plus one plans for 2^m factorials. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **13**, 567–580.

Gupta, S.C. (1985). On Kronecker block designs for factorial experiments. *J. Statist. Plann. Inference,* **11**, 227-236.

Gupta. V K. and A. K. Nigam (1985). A class of asymmetrical orthogonal resolution IV designs. *J. Statist. Plann. Inference*, **11**, 381–383.

Gupta, V.K., Nigam, A.K., and Dey, A. (1982). Orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorials. *Technometrics*, **24**, 135–137.

Hall, M., Jr. (1986). *Combinatorial Theory,* 2nd ed. New York: Wiley.

Hamada, M. and Balakrishnan, N. (1998). Analyzing unreplicated factorial experiments: A review with some new proposals (with discussion). *Statist. Sinica*, **8**, 1–41.

Healy, M.J.R. and Gower, J.C. (1961). Aliasing in partially confounded factorial experiments. *Biometrika*, **48**, 218–220.

Hedayat. A. S. and Pesotan, H. (1992). Two-level factorial designs for main effects and selected two-factor interactions. *Statist. Sinica*, **2**, 453–464.

Hedayat, A. S. and Pesotan, H. (1997). Designs for two-level factorial experiments with linear models containing main effects and selected two-factor interactions. *J. Statist. Plann. Inference*, **64**, 109–124.

Hedayat, A.S., Pu, K., Stufken, J. (1992). On the construction of asymmetrical orthogonal arrays. *Ann. Statist.*, **20**, 2142–2152.

Hedayat, A.S., Raghavarao, D., and Seiden, E. (1975). Further contributions to the theory of F-squares design. *Ann. Statist.*, **3**, 712–716.

Hedayat, A. S., Raktoe, B.L., and Federer, W.T. (1974). On a measure of aliasing due to fitting an incomplete model. *Ann. Statist.*, **2**, 650–660.

Hedayat, H. and Seiden, E. (1970). F-square and orthogonal F-square design: a generalization of Latin square and orthogonal Latin squares design. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 2035–2044.

Hedayat, A.S., Seiden, E., and Stufken. J. (1997). On the maximal number of factors and the enumeration of 3-symbol orthogonal arrays of strength 3 and index 2, *J. Statist. Plann. Inferences*, **58**, 43–63.

Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A., and Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*. New York: Springer.

Hedayat, A. S. and Stufken, J. (1988). Two-symbol orthogonal arrays. In *Optimal Design and Analysis of Experiments,* Y.Dodge el al., eds. Amsterdam: North-Holland, 47–58.

Hedayat, A. S. and J. Stufken (1989). On the maximum number of constraints in orthogonal arrays. *Ann. Statist.* **17**, 448–451.

Hedayat, A.S. and Stufken, J. (1999). Compound orthogonal arrays. *Technometrics*, **41**, 57–61.

Hedayat, A.S., Stufken, J., and Su., G. (1996). On difference schemes and orthogonal arrays of strength t. *J. Statist. Plann. Inference*, **56**, 307–324.

Hedayat, A., Stufken, S.J., and Su, G. (1997). On the construction and existence of orthogonal arrays with three levels and indexes 1 and 2. *Ann. Statist.*, **25**, 2044–2053,

Hedayat, A.S. and Wallis, W.D. (1978). Hadamard matrices and their applications. *Ann. Statist.*, **6**, 1184–1238.

Hilow, H. (2012). Minimum cost linear trend free fractional factorial designs. *J. Stat. Theory Pract.*, **6**, 580–589.

Hoel, P.G. (1958). Efficiency problems in polynomial estivation. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 1134–1145.

Hotelling, H. (1944). Some improvements in weighing and other experimental techniques, *Ann. Math. Stat.,* **15**, 297–306.

Horadam, K.J. (2007). *Hadamard Matrices and Their Applications*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Huang, P.-H. (2010). Two-level designs in block of size two in which all main effects and two factor interactions are estimable. *Commun. Statist. Theory Meth.* , **39**, 2485–2491.

Hunter, J.S. (1964). Sequential factorial estimation. *Technometrics*, **6**, 41–56.

Hyodo, Y., Yumiba, H., and Yamamoto, S. (1997). Characterization of orthogonal 24-run 2^6 factorial designs derivable from saturated two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 24, 23 constraints and index 6. *SUT J. Math.*, 33, 277–290.

Hyodo, Y., Yumiba, H., and Yamamoto, S. (1999). On fractional s^m factorial designs. *SUT J. Math.*, **35**, 295–307.

Inkson, R.H.E. (1961). The analysis of a 3^2 x 2^2 factorial experiment with confounding. *J. Appl. Statist.*, **10**, 98–107.

Jacroux, M. (1992). A note on the determination and construction of minimum orthogonal main-effect plans. *Technometrics*, **34**, 92–96.

Jacroux, M. (1993). On the construction of minimum partially replicated orthogonal main-effect plans. *Technometrics*, **35**, 32–36.

Jacroux, M. (1994). On the construction of trend resistant mixed level factorial run orders. *Ann. Statist.,* **22**, 904–916.

Jacroux, M (1996). On the construction of trend resistant asymmetrical orthogonal arrays. *Statist. Sinica*, **6**, 289–297.

Jacroux, M. and Notz, W. (1983). On the optimality of spring balance weighing designs. *Ann. Statist.*, **11**, 970–978.

Jacroux, M. and Saharay, R. (1990). On the construction of trend free row-column 2-level factorial experiments. *Metrika*, **37**, 163–180.

Jacroux, M. and Saharay, R. (1991). Run orders of trend resistant 2-level factorial designs, *Sankhyā*, Ser. B, **53**, 202–212.

Jacroux, M., Wong, C.S., and Masaro, J.C. (1983). On the optimally of chemical balance weighing designs. *J. Statist. Plann. Inference*, **8**, 231–240.

James, A.N. (1963). Factorial experiments. *Statistician*, **13**, 203–209.

John, J.A. (1973). Factorial experiments in cyclic designs. *Ann. Statist.*, **1**, 188–194.

John, J.A. (1973). Generalized cyclic designs in factorial experiments. Biometrika, **60**, 55–63.

John, J.A. and Dean, A.M. (1975). Single replicate factorial experiments in generalized cyclic designs. I. Symmetrical arrangements. *J. Roy. Statist. Soc.* Ser. B, **37**, 63–71.

John, J.A. and Smith, T.M.F. (1972). Two-factor experiments in non-orthogonal designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **34**, 401–409.

John, P.W.M. (1964). Blocking of $3(2^{n-k})$ designs. *Technometrics*, **6**, 371–376.

John, P.W.M. (1966). Augmenting 2^{n-1} designs. *Technometrics*, **2**, 469–480.

John, P.W.M. (1966). On identity relationships for 2^{n-r} designs having words of equal length. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1842–1843.

John, P.W.M. (1970). A three-quarter fraction of the 43 design. *Austral. J. Statist.*, **12**, 73.

John, P.W.M. (1971). *Statistical design and analysis of experiments*. Macmillan Co., 356 pp.

John, P.W.M. (1990). Time trends and factorial experiments, *Technometrics*, **32**, 275–282.

John, P.W.M. (1997). Missing points in 2^n and 2^{n-k} factorial designs. *Technometrics*, **21**, 225–228.

John, P.W.M. (2000). Breaking alias chains in fractional factorials. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **29**, 2143–2155.

John, P.W.M., Johnson, M.E., Moore, L.M. and Ylvisaker, D. (1995). Minimax distance designs in two-level factorial experiments. *J. Statist. Plann. Inference*, **44**, 249–263.

Johnson, N.L. (1967). Analysis of a factorial experiment (Partially confounded 23). *Technometrics*, **9**, 167–178.

Joiner. B. L. and Campbell, C. (1976). Designing experiments when run order is important. *Technometrics*, **18**, 249–259.

Jungnickel, D. (1979). On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices. Math. Z., 167, 49–60.

Kacker, R.N., Lagergren, E.S., and Filliben, J.J. (1991). Taguchi fixed element arrays are fractional factorials. *J. Qual. Tech.*, **23**, 107-116.

Kageyama, S. (1988). On orthogonal arrays attaining Rao's bounds. *J. Statist. Plann. Inferences*, **19**, 395–400.

Kao, E.P.C. (1969). A non-parametric approach to the 2^3 factorial design. *Technometrics*, **11**, 193–196.

Kempthorne, O. (1947). A simple approach to confounding and fractional replication in factorial experiments. *Biometrika*, **34**, 255–272.

Kiefer, J.C. (1975). Construction and optimally of generalized Youden designs. In *A Survey of Statistical Design and Linear Models,* J.N. Srivaslava, ed. Amsterdam: North-Holland, 333–353.

Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1960). The equivalence of two extremum problems. Canad. J. Math., **12**, 363–366.

Kishen, K. (1942). On Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes. *Current Sci.*, **11**, 98–99.

Kishen, K. (1945). On the design of experiments for weighing and making other types of measurements. *Ann. Math. Statist.*, **16**, 294–300.

Kishen, K. (1947). On fractional replication of the general symmetrical factorial design. *Current Sci.*, **16**, 138.

Kishen, K. (1948). On fractional replication of the general symmetrical factorial design. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **1**, 91–106.

Kishen, K. (1949). On the construction of Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **2**, 20–48.

Kishen, K. (1950). Expression of unitary components of the highest order interactions in 35, 36, 44 and 53 designs in terms of sets for these interactions. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **11**, 196–211.

Kishen, K. (1959). A note on the construction of the (2^{16}, 2^{11}) and their associated confounded designs, keeping up to second interactions inconfounded. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **11**, 180–186.

Kishen, K. (1960). On a class of asymmetrical factorial designs. *Current Sci.*, **29**, 465–466.

Kishen, K. and Srivastava, J.N. (1959). Confounding in asymmetrical factorial designs in relation to finite geometries. *Current Sci.*, **28**, 98–100.

Kishen, K. and Srivastava, J.N. (1959). Mathematical theory of confounding in asymmetrical and symmetrical factorial design. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **14**, 73–110.

Kishen, K. and Tyagi, B.N. (1961). On some methods of construction of asymmetrical factorial designs. *Current Sci.*, **30**, 407–409.

Kitayawa, T. and Mitome, M. (1958). *Tables for the design of factorial experiments*. New York: Dover.

Kobilinsky, A. and Monod. H. (1995). Juxtaposition of regular factorial designs and the complex linear model. *Scand. J. Statist.*, **22**, 223–254.

Kolyva-Machcra, F. (1989). D-optimality in 3^k designs for $N \equiv 1 \pmod 9$ observations. *J. Statist. Plann. Inference*, **22**, 95–103.

Koukouvinos. C. (1996). Linear models and D-optimal designs for $n \equiv 2 \pmod 4$. *Statist. Probab. Lett.*, **26**, 329–332.

Kounias, S. and Chadjipantelis, T. (1983). Some D-optimal weighing designs for $n \equiv 3 \pmod 4$. *J. Statist. Plann. Inference*, **8**, 117–127.

Kounias, S. and Farmakis, N. (1984). A construction of D-optimal weighing designs when $n \equiv 3 \pmod 4$. *J. Statist. Plann. Inference*, **10**, 177–187.

Kounias, S., Lefkopoulou, M. and Bagiatis, C. (1983). G-optimal N observation first order 2^k designs. *Discrete Math.*, **46**, 21–31.

Kounias, S. and Petros, C.I. (1975). Orthogonal arrays of strength three and four with index unity. *Sankhyā*, Ser. B, **37**, 228–240.

Krafft, O. (1990), Some matrix representations occurring in linear two-factor models. In *Probability Statistics and Design of Experiments*, R.R. Bahadur, ed. New Delhi: Wilev Hasten, 461–470.

Krafft, O. and Schaefer, M. (1991) E-optimally of a class of saturated main effect plans. *Statistics*, **22**, 9–15.

Krehbiel, T.C. and Anderson, D.A. (1991). Optimal fractional factorial designs for estimating interactions of one factor with all others: 3^m series. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **20**, 1055–1072.

Kriskal, I.B. (1965). Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformation on the date. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **2**, 251–263.

Kshirsagar, A.M. (1966). Balanced factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **28**, 559–567.

Kurkjian, B. and Zelen, M. (1962). A calculus for factorial arrangements. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 600–619.

Kurkjian, B. and Zelen, M. (1962). Factorial designs and their direct product. *Bull. Internat. Statist. Inst.*, **39**, 509–519.

Kuwada, M. (1982). On some optimal fractional 2^m factorial designs of resolution V, *J. Statist. Plann. Inference*, 7, 39–48.

Laycock, P J. and Rowley, P.J. (1995). A method for generating and labelling all regular fractions or blocks for q^{n-m} designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **57**, 191 –204.

Leary, S., Bhaskar, A., and Keane, A. (2003). Optimal orthogonal-array-based Latin hypercubes. *J. Appl. Statist.*, **30**, 585–598.

Lewis, S.M. (1979). The construction of resolution III fractions from generalized cyclic designs. *J. Roy. Statist. Soc.* Ser. B, **41**, 352–357.

Lewis, S. M, and John, J.A. (1976). Testing main effects in fractions of asymmetrical factorial experiments. *Biometrika*, **63**, 678–680.

Li, W. and Lin, D.K.J. (2003). Optimal foldover plans for two-level fractional factorial designs. *Technometrics*, **45**, 142–149.

Li, W. and Nachtsheim, C.J. (2000). Model-robust factorial designs. *Technometrics*, **42**, 345–352.

Liao, C.T., Iyer, H.K., and Vecchia, D.F. (1996). Construction of orthogonal two-level designs of user-specified resolution where $N \neq 2^k$. *Technometrics*, **38**, 342–353.

Lin, D. K. J. and Draper, N.R. (1992), Projection properties of Plackett and Burman designs. *Technometrics*, **34**, 423–428.

Liu, M.-S. and Yao, J.-S. (1989). Some orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorials derivable from orthogonal arrays. *Chinese J. Math.*, **17**, 9–27.

Loeppky, J. (2007). A modern theory of factorial design. *Technometrics*, **49**, 365–366.

Madhava, K.B. (1956). Sequential approach in factorial designs. *Rev. Inst. Internat. Statist.*, **24**, 64–72.

Mandeli, J.P. (1995). Construction of asymmetrical orthogonal arrays having factors with a large non-prime power number of levels. *J. Statist. Plann. Inference*, **47**, 377–391.

Mandeli, J.P., Lee, F.-C.H., and Federer, W.T. (1981). On the construction of orthogonal F-squares of order n from an orthogonal array (n, k, s, 2) and an OL(s, t) set. *J. Statist. Plann. Inference*, **5**, 267–272.

Mann, H.B. (1962). Main effects and interactions. *Sankhyā*, Ser. A, **24**, 185–202.

Margolin, B.H. (1967). Systematic methods for analyzing 2^n3^m factorial experiments with applications. *Technometrics*, **9**, 245–259.

Margolin, B.H. (1968). Weighing designs and designs of resolution III and IV for two-level factors. *Technometrics*, **10**, 424.

Margolin, B.H. (1968). Orthogonal main effect 2^n3^m designs and two-factor interaction aliasing. *Technometrics*, **10**, 559–573.

Margolin, B.H. (1969). Resolution IV fractional factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **31**, 514–523.

Margolin, B.H. (1969). Results on factorial designs of resolution IV for the 2^n and 2^n3^m series. *Technometrics*, **11**, 431–444.

Margolin, B.H. (1972). Non-orthogonal main effect designs for asymmetrical factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **34**, 431–440.

Masaro, J. and Wong, C.S. (1992). Type I optimal weighing designs when $N \equiv 3$ (mod 4). *Utilitas Math.*, **41**, 97–107.

Meyer, R.D., Steinberg, D.M. and Box, G. (1996). Follow-up designs to resolve confounding in multifactor experiments (with discussion). *Technometrics*, **38**, 303–332.

Mitchell, T.J. (1974). Computer construction of "D-optimal" first order designs. *Technometrics*, **16**, 211–220.

Mitchell T.J. and Bayne, C.K. (1978). D-optimal fractions of three-level factorial designs. *Technometrics*, **20**, 369–380.

Mitton, R.G. and Morgan, F. R. (1959). The design of factorial experiments: a survey of some schemes requiring not more than 256 treatment combinations. *Biometrika*, **46**, 251–259.

Monette, G. (1983). A measure of aliasing and applications to two-level fractional factorials. *Canadian J. Statist.*, **11**, 199–206.

Mood, A.M. (1946). On Hotelling's weighing problem. *Ann. Math. Statist.*, **17**, 432–446.

Morgan, J.P and N. Uddin, N. (1996). Optimal blocked main effects plans with nested rows and columns. *Ann. Statist.*, **24**, 1185–1208.

Morrison, M. (1956). Fractional replication for mixed series. *Biometrics*, **12**, 1–19.

Mount-Campbell, C.A. and Neuhardt, J.B. (1981). On the number of 2^{n-p} fractional factorials of resolution III. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **10**, 2101–2111.

Moyssiadis, C., Chadjiconstantinidis, S., and Kounias, S. (1995). A-optimization of exact first order saturated designs for $N \equiv 1$ (mod 4) observations. *Linear Alg. Appl.*, **216**, 159–176.

Mukerjee, R. (1979). On a theorem by Bush on orthogonal arrays. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **28**, 169–170.

Mukerjee. R. (1980). Orthogonal fractional factorial plans. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **29**, 143–160.

Mukerjee, R. (1982). Universal optimality of fractional factorial plans derivable through orthogonal arrays. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **31**, 63–68.

Mukerjee, R. (1986). Construction of orthogonal factorial designs controlling interaction efficiencies. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **15**, 1535–1548.

Mukerjee, R. (1995). On E-optimal fractions of symmetric and asymmetric factorials. *Statist. Sinica*, **5**, 515–533.

Mukerjee, R. (1999). On the optimally of orthogonal array plus one run plans. *Ann. Statist.*, **27**, 82–93.

Mukerjee, R., Chan, L.Y., and Fang, K.T. (2000). Regular fractions of mixed factorials with maximum estimation capacity. *Statist. Sinica*, **10**, 1117–1132.

Mukerjee. R. and Chatterjee, K. (1985). Estimabilily and efficiency in proportional frequency plans. J. Indian Soc. Agric. Statist., 37, 79–87.

Mukerjee, R., Chatterjee, K., and Sen, M. (1986). D-optimality of a class of saturated main effect plans and allied results. *Statistics*, **17**, 349–355.

Mukerjee, R., and Kageyama, S. (1994). On existence of two symbol complete orthogonal arrays. *J. Combin. Theory*, Ser. A, **66**, 176–181.

Mukerjee, R. and Ray, R.S. (1985). Asymptotically optimal weighing designs with string property. *J. Statist. Plann. Inference,* **12**, 87-91.

Mukerjee, R. and Sinha, B.K. (1990). Almost saturated D-optimal main effect plans and allied results. *Metrika*, **37**, 301–307.

Mukerjee, R., and Wu, C.F.J. (1995). On the existence of saturated and nearly saturated asymmetric orthogonal arrays. *Ann. Statist.*, **23**, 2102–2115.

Mukhopadhyay, A.C. (1981). Construction of some series of orthogonal arrays. *Sankhyā,* Ser. B, **43**, 81–92.

Muller, E.R. (1966). Balanced confounding of factorial experiments. *Biometrika*, **53**, 507–524.

Murty, V.N. (1957). Analysis of a 3^3 factorial designs. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **7**, 124–126.

Nachtsheim, C.J. (1987). Orthogonal fractional factorial designs. *Technometrics*, **29**, 387–388.

Nair, K.R. and Rao, C.R. (1941). Confounded designs for asymmetrical factorial experiments. *Science and Culture*, **7**, 313–314.

Nair, K.R. and Rao, C.R. (1942). Confounded designs for $k \times p^m \times q^n$ type of factorial experiment. *Science and Culture*, **7**, 361–362.

Nair, K.R. and Rao, C.R. (1948). Confounding in asymmetrical factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **10**, 109–131.

Nelder, J.A. (1963). Identification of contrasts in fractional replicates of 2^n experiments. *Appl. Statist.*, **12**, 38–43.

Nguyen, N. K. (1996). A note on the construction of near orthogonal arrays with mixed levels and economic run size. *Technometrics*, **38**, 279–283.

Nguyen. N. K. and Dey, A. (1989). Computer aided construction of D-optimal 2^m fractional factorial designs of resolution V. *Austral. J. Statist.*, **31**, 111–117.

Nguyen, N, K. and Miller, A.J. (1997). 2^m fractional factorial designs of resolution V with high A-efficiency. $7 \leq m \leq 10$. *J. Statist. Plann. Inference*, **59**, 379–384.

Nigam, A.K. (1985). Main-effect orthogonal plans from regular group divisible designs. *Sankhyā*, Ser. B, **47**, 365–371.

Nigam, A.K. And Gupta, V.K. (1985). Construction of orthogonal main-effect plans using Hadamard matrices, *Technometrics*, **27**, 37–40.

Noda, R. (1979). On orthogonal arrays of strength 4 achieving Rao's bound. *J. London Math. Soc.*, **19**, 385–390.

Noda, R. (1986). On orthogonal arrays of strength 3 and 5 achieving Rao's bound. *Graphs and Combin.*, **2**, 277–282.

Olaf, K. And Martin, S. (1991). E-optimality of a class of saturated main-effect plans. *Statistics*, **22**, 9–15.

Paik, U.B. and Federer, W.T. (1970). A randomized procedure of saturated main effect fractional replicates. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 369–375.

Paik, U.B. and Federer, W.T. (1972). On a randomized procedure for saturated fractional replicates in a 2^n-factorial. *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1346–1351.

Paik, U.B. and Federer, W.T. (1973). On construction of fractional replicates and on aliasing schemes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 567–585.

Paley, R.E.A.C.(1933). On orthogonal matrices. *J. Math. and Phys.*, **12**, 311–320.

Parikh, A.M. (1967). Further results in fractional factorial designs on type 2^m. *J. Univ. Baroda*, **15**, 59–64.

Parker, E.T. (1959). Orthogonal Latin squares. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45**, 859–862.

Patel, M.S. (1962). On constructing the fractional replicates of the 2^m designs with blocks. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1440–1449.

Patterson, H.D. (1965). The factorial combination of treatments in rotation experiments. J. Agric. Sci., 65, 171–182.

Patterson, H.D. (1968). Serial factorial design. *Biometrika,* **55**, 67–81.

Paterson, L.J. (1988). The efficiency factors of particular effects in designs with orthogonal factorial structure. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **50**, 109-117.

Pearce, S.C. (1963). The use and classification of non-orthogonal designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. A, 353–377.

Pearce, S.C. (1968). The mean efficiency of equi-replicate designs. *Biometrika*, **55**, 251–253.

Pearce, S.C. (1970). The efficiency of block designs in general. *Biometrika*, **57**, 339–346.

Pesotan, H. and Raktoe, B.L. (1985). Some determinant optimality aspects of main effect foldover designs. *J. Statist. Plann. Inference*, **11**, 399–410.

Pesotan, H. and Raktoe, B.L. (1988). On invariance and randomization in factorial designs with applications to D-optimal main effect designs of the symmetric factorial. *J. Statist. Plann. Inference*, **19**, 283–298.

Phillips, J.P.N. (1964). The use of magic squares for balancing and assessing order effects in some analysis of variance designs. *J. Roy. Statist. Soc.*, **13**, 67–73.

Phillips, J.P.N. (1969). Method of constructing one-way and factorial designs balanced for trend. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. C, **17**, 162–170.

Pigeon, J.G. and McAllister, P.R. (1989). A note on partially replicated orthogonal main-effect plans, *Technometrics*, **31**, 249–251.

Pignatiello, J.J. (1985). A minimum cost approach for finding fractional factorials. *IIE Transactions*, **17**, 212-218.

Plackett, R.L. (1946). Some generalizations in the multifactorial design. *Biometrika*, **33**, 328–332.

Plackett, R.L. and Burman, J.P. (1946). The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika*, **33**, 305–325.

Potthoff, R.F. (1962). Three-factor additive designs more general than the Latin square. *Technometrics*, **4**, 187–208.

Potthoff, R.F. (1962). Four-factor additive designs more general than the Greco-Latin square. *Technometrics*, **4**, 361–366.

Prairie, R.R. and Zimmer, W.J. (1964). 2^p factorial experiments with the factor applied sequentially. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **59**, 1205–1216.

Preece, D.A. (1966). Classifying Youden rectangles. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **28**, 118–130.

Preece, D.A. (1966). On Addelman's 2^{17-9} resolution V plan. *Technometrics*, **8**, 705–707.

Preece, D.A. (1989). Factorial experimentation in second-order Latin cubes. *J. Appl. Statist.*, **16**, 19–24.

Preece, D.A., Pearce, S.C., and Kerr, J.R. (1973). Orthogonal designs for three-dimensional experiments. *Biometrika*, **60**, 349–358.

Pukelsheim, R. (1993). *Optimal Design of Experiments*. New York: Wiley.

Qvist, B. (1952). Some remarks concerning curves of second degree in finite plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A, **1**, 1–27.

Raghavarao, D. (1959). Some optimum weighing designs. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 295–303.

Raghavarao, D. (1960). Some aspects of weighing designs. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 878–884.

Raghavarao, D. (1965). A note on fractions of 3^{4n+1} designs. *Technometrics*, **7**, 69–70.

Raghavarao, D. (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. New York: Wiley.

Raghavarao, D., Anderson, D.A., and Pesotan, H. (1991). A class of optimally embedded resolution III designs. *Utilitas Math.*, **39**, 33–39.

Raktoe, B.L. (1969). Combining elements from distinct finite fields in mixed factorials. *Ann. Math. Statist.*, **40**, 498–504.

Raktoe, B.L. (1974). A geometrical formulation of an unsolved problem in fractional factorial designs. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **3**, 959–968.

Raktoe, B.L. (1976). On alias matrices and generalized defining relationships of equi-information factorial experiments. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **38**, 279–283.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1968). A unified approach for constructing a useful class of nonorthogonal main effect plans in k^n factorials. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **30**, 371–380.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1969). Some non-orthogonal unsaturated main effect and resolution V plan derived from a one-restrictional lattice. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 335–342.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1970). A lower bound for the number of singular saturated main effect plans of an s^m factorial. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **22**, 519–525.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1970). A theorem on saturated plans and their complements. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 2184–2185.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1970). Characterization of optimal saturated main effect plans of the 2^n factorial. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 203–206.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1971). On the number of generators of saturated main effect fractional replicates. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1758–1760.

Raktoe, B.L. and Federer, W.T. (1973). Balanced optimal saturated main effect plans of the 2^n factorial and their relation to (v, k, λ)-configurations. *Ann. Statist.*, **1**, 924–932.

Raktoe, B.L., Hedayat, A., and Federer, W.T. (1981). *Factorial Designs*. New York: Wiley.

Rao, C.R. (1946). On hypercubes of strength "d" leading to confounded design in factorial experiments. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **38**, 67–78.

Rao, C.R, (1947). Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *J. Roy. Statist. Soc.* Suppl., **9**, 128–139.

Rao, C.R. (1950). The theory of fractional replication in factorial experiments. *Sankhyā*, **10**, 81–86.

Rao, C.R. (1961). Combinatorial arrangements analogous to orthogonal arrays. *Sankhyā*, Ser. A, **23**, 283–286.

Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. New York: Wiley.

Rao, C.R. (1973). Some combinatorial problems of arrays and applications to design of experiments. In *A Survey of Combinatorial Theory*, J.N. Srivastava, ed. Amsterdam, North-Holland, 349–359.

Rao, M.B. (1966). Weighing designs when "n" is odd. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1371–1381.

Raychaudhuri, D.K. and Singhi, N.M. (1988). On existence and number of orthogonal arrays. *J. Combin. Theory*, Ser. A, **47**, 28-36.

Ruiz, F. and Seiden, E. (1974). On construction of some families of generalized Youden designs. *Ann. Statist.*, **2**, 503–519.

Russell, K.G., Lewis, S.M., and Dean, A. (2004). Fractional factorial designs for the detection of interactions between design and noise factors. *J. Appl. Statist.*, **31**, 545–552.

Ryan, K.J. and Bulutoglu, D.A. (2010). Minimum aberration fractional factorial designs with large N. *Technometrics*, **52**, 250–255.

Saha, G.M. (1975). Some results on tactical configurations and related topics, *Utilitas Math.*, **7**, 223–240.

Saha, G.M. and Mohanty, S. (1970). On non-orthogonal main effect plans for asymmetrical factorials. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **22**, 159–169.

Sana, G.M., Pesotan, H., and Raktoe, B.L. (1982). Globally orthogonal regular fractions of the s^n factorial. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **11**, 13–30.

Saha, G.M., Raktoe, B.L., and Pesotan, H. (1982). On the problem of augmented fractional factorial designs. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **11**, 2731–2745.

Sardana, M.G. (1965). Construction and analysis of $2q \times 2^2$ asymmetrical factorial designs in two replications. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **17**, 111–115.

Sardana, M.G. and Sreenath, P.R. (1965). Construction and analysis of designs of the type k^2 x 2^n in k^2 x 2^p plot blocks. *Bull. Calcutta Statist. Assoc.*, **14**, 74–79.

Sarma, T.C.S.R. (1967). On construction of symmetrical fractional factorial designs. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **19**, 83–91.

Sathe, Y.S. and Shenoy, R.G. (1989). A-optimal weighing designs when $N \equiv 3 \pmod 4$. *Ann. Statist.*, **17**, 1906–1915.

Sathe, Y.S. and Shenoy, R.G. (1990). Construction method for some A- and D-optimal weighing designs when $N \equiv 3 \pmod 4$. *J. Statist. Plann. Inference*, **24**, 369–375.

Sathe, Y.S. and Shenoy, R.G. (1991). Further results on construction methods for some A- and D-optimal weighing designs when $N \equiv 3 \pmod 4$. *J. Statist. Plann. Inference*, **28**, 339–352.

Saunders, I.W., Eccleston, J.A., and Martin, R.J. (1995). An algorithm for the design of 2^p factorial experiments on continuous processes. *Austral. J. Statist.*, **37**, 353–365.

Saxena, P.N. (1960). On the Latin cubes of the second order and the fourth replication of the three-dimensional or cubic lattice designs. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **12**, 100–140.

Seiden, E. (1954). On the problem of construction of orthogonal arrays. *Ann. Math. Statist.*, **25**, 151–156.

Seiden, E. and Zemach, R. (1966). On orthogonal arrays. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1355–1370.

Shah, B.V. (1958). On balancing in factorial experiments. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 766–779.

Shah, B.V. (1960). Balanced factorial experiments. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 502–514.

Shah, B.V. (1960). On a 5 x 2^2 factorial design. *Biometrics*, **16**, 115–118.

Shirakura, T. (1976). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution VII, $6 < m < 8$. *Ann. Statist.*, **4**, 515–531.

Shirakura, T. (1993). Fractional factorial designs of two and three levels. *Discrete Math.*, **116**, 99–135.

Shirakura, T, and Tong, W.P. (1996). Weighted A-optimally for fractional 2^m factorial designs of resolution V. *J. Statist. Plann. Inference*, **56**, 243–256.

Shrikhande, M. A (1986). Survey of some problems in combinatorial designs. A matrix approach. *Linear Algebra Appl.*, **79**, 215-247.

Shrikhande, S.S. and Singhi, N.M. (1979). A note on embedding of orthogonal arrays of strength two, *J. Statist. Plann. Inference*, **3**, 267–271.

Shrikhande, S.S. and Singhi, N.M. (1979). Embedding of orthogonal arrays of strength two and deficiency greater than two. *J. Statist. Plann. Inference*, **3**, 367–379.

Sinha, B.K. and Mukerjee, R. (1982). A note on the universal optimally criterion for full rank models. *J. Statist. Plann. Inference*, **7**, 97–100.

Sitter, R. R., Chen, J., and Feder, M. (1997). Fractional resolution and minimum aberration in blocked 2^{n-k} designs. *Technometrics*, **39**, 382–390.

Sloane, N.J.A. and Stufken, J. (1996). A linear programming bound for orthogonal arrays with mixed levels. *J. Statist. Plann. Inference*, **56**, 295–305.

Smith, C.A.B. and Hartley, H.O. (1948). The construction of Youden squares. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **10**, 262–263.

Sreenath, P.R. (1965). On certain methods of construction of confounded asymmetrical factorial designs with smaller number of replications. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, **17**, 166–181.

Sreenath, P.R. and Sardana, M.G. (1967). Construction and analysis of designs $(2q + 1)\times 2^n$ in $(2q + 2)\times 2^p$ plot blocks. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.*, **16**, 24–36.

Srivastava, J.N. (1965). Theory of optimal nonsingular semiregular fractional factorial plans, Abstract. *Bull. Internat. Statist. Inst.*, **41**, 959.

Srivastava, J.N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. In *Essays in Probability and Statistics*, R.C.Bose et al., eds., Chapel Hill, University of North Carolina Press, 689–706.

Srivastava, J.N. (1978). A review of some recent work on discrete optimal factorial designs for statisticians and experimenters. In *Developments in Statistics*, P.R., Krishnaiah, ed., **1**. New York: Academic Press, 267–329.

Srivastava, J.N. (1987). Advances in the general theory of factorial designs based on partial pencils in Euclidean n-space. *Utilitas Math.*, **32**, 75–94.

Srivastava, J.N. and Anderson, D.A. (1970). Optimal fractional plans for main effects orthogonal to two-factor interactions: 2^m series. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **65**, 828–843.

Srivastava, J.N., Anderson, D.A., and Mardekian, J. (1984). Theory of factorial designs of the parallel flats type. I. The coefficient matrix. *J. Statist. Plann. Inference*, **9**, 229–252.

Srivastava, J. N. and Arora, S. (1991). An infinite series of resolution III.2 designs for the 2^m factorial experiment. *Discrete Math.*, **98**, 35–56.

Srivastava, J. N. and Chopra, D.V. (1971). Balanced optimal 2^m fractional factorial designs of resolution V, $m < 6$. *Technometrics*, **13**, 257–269.

Srivastava, J. N. and Chopra, D.V. (1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 722–734.

Srivastava, J.N. and Ghosh, S. (1976). A series of 2^m factorial designs of resolution V which allow search and estimation of one extra unknown effect. *Sankhyā*, Ser. B, **38**, 280–289.

Srivastava, J.N. and Ghosh, S. (1996). On nonorthogonality and nonoptimality of Addelman's main effect plans satisfying the condition of proportional frequencies. *Statist. Probab. Lett.*, **26**, 51–60.

Srivastava, J.N. and Li, J. (1996). Orthogonal designs of parallel flats type. *J. Statist. Plann. Inference*, **53**, 261–283.

Srivastava, J.N. and Mallenby, D.W. (1985). On a decision rule using dichotomies for identifying the nonnegligible parameter in certain linear models. *J. Multivariate Anal.*, **16**, 318–334.

Srivastava, J.N. and Throop, D. (1990). Orthogonal arrays obtainable as solutions to linear equations over finite fields. *Linear Alg. Appl.*, **127**, 283-300.

Starks, T.H. (1964). A note on small orthogonal main effect plans for factorial experiments. *Technometrics*, **6**, 220–222.

Steinberg, D.M. (1988). Factorial experiments with time trends. *Technometrics*, **30**, 259–269.

Street, A.P. and Street, D.J. (1987). *Combinatorics of Experimental Design*. New York: Clarendon Press.

Street, D.J. (1979). Generalized Hadamard matrices, orthogonal arrays and F-squares. *Ars Combin.*, **8**, 131-141.

Street, D.J. (1994). Constructions for orthogonal main effect plans. *Utilitas Math.*, **45**, 115–123.

Street, D.J. and Burgess, L. (1994). A survey of orthogonal main effect plans and related structures. *Congr. Numer.*, **99**, 223–239.

Suen, C.-Y. (1989). A class of orthogonal main effect plans. *J. Statist. Plann. Inference*, **21**, 391–394.

Suen, C.-Y. (1989). Some resolvable orthogonal arrays with two symbols. *Commun. Statist. Theory Meth*., **18**, 3875–3881.

Suen, C.-Y. and Chen, H. (2000). A family of regular fractional factorial designs with maximum resolution. *J. Stat. Comput. Simul.*, **66**, 67–78.

Suen, C.-Y., Chen, H., and Wu, C.F.J. (1997). Some identities on q^{n-m} designs with application to minimum aberration designs. *Ann. Statist.*, **25**, 1176–1188.

Sun, D.X. and Wu, C.F.J. (1994). Interaction graphs for three-level fractional factorial designs. *J. Qual. Tech.*, 26, 297–307.

Sun, D.X., Wu, C.F.J., and Chen, Y. (1997). Optimal blocking schemes for 2^n and 2^{n-p} designs. *Technometrics*, **39**, 298–307.

Tallini, G. (1956). Sulla k-calotta i uno spazio lineare finito. Ann. Math., **42**, 119–164.

Tang, B. (1993). Orthogonal array-based Latin hypercubes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **88**, 1392–1397.

Tang, B. and Deng, L.Y. (1999). Minimum G_2-aberration for nonregular fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **27**, 1914–1926.

Tang, B. and Wu, C.F.J. (1996). Characterization of minimum aberration 2^{n-k} designs in terms of their complementary designs. *Ann. Statist.*, **24**, 2549–2559.

Tarry, G. (1900). Le problème des 36 officiers. *Comptes Rendus Assoc. France Av. Sci.*, 29, part 2, 170–203.

Thompson, H.R. and Dick, J.D. (1951). Factorial designs in small blocks derived from orthogonal Latin squares. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **13**, 126–130.

Tiahrt, K.J. and Weeks, P.L. (1970). A method of constrained randomization for 2^n factorials. *Technometrics*, **12**, 471–486.

Ting, C.-P. (2010). D-optimal two-level fractional factorial designs of resolution III with two dispersion factors. *Commun. Statist. Theory Meth.*, **39**, 2515–2532.

Toman, B. (1994). Bayes optimal designs for two- and three-level factorial experiments. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **89**, 937–946.

Tukey, J.W. (1959). Little pieces of mixed factorials. Biometrics, 15, 641–642.

Turiel, T.P. (1988). A computer program to determine defining contrasts and factor combinations for two-level fractional factorial designs of resolution III, IV, and V. *J. Qual. Tech.*, **20**, 267-272.

Turiel, T.P. (1988). A Fortran program to generate fractional factorial experiments. *J. Qual. Tech.*, **20**, 63-72.

Vessercau, H. (1961). Note sur les plans factoriels 2^p. *Rev. Statist. Appl.*, **9**, 7–9.

Voelkel, J.G. (2005). The efficiencies of fractional factorial designs. *Technometrics*, **47**, 488–494.

Voss, D.T. (1986). First order deletion designs and the construction of efficient nearly orthogonal factorial designs in small blocks. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 813-818.

Voss, D.T. (1988). Single generator generalized cyclic factorial designs as pseudofactor designs. *Ann. Statist.*, **16**, 1723-1726.

Wang, J. C. (1996). Mixed difference matrices and the construction of orthogonal arrays. *Statist. Probab. Lett.*, **28**, 121–126.

Wang, J.C. and Wu, C.F.J. (1991). An approach to the construction of asymmetrical orthogonal arrays. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **86**, 450–456.

Wang, P.C. (1990). On the constructions of some orthogonal main effect plans, *Sankhyā*, Ser. B, **52**, 319–323.

Wang, P.C. (1991). Symbol changes and trend-resistance in orthogonal plans of symmetric factorials. *Sankhyā*, Ser. B, **53**, 297–303.

Wang, P.C. (1996). Level changes and trend resistance in $L_N(2^p4^q)$ orthogonal arrays. *Statist. Sinica*, **6**, 471–479.

Wang, P.C and Jan, H.W. (1995). Designing two-level factorial experiments using orthogonal arrays when the run order is important. *The Statistician*, **44**, 379–388.

Wang, J.C. and Wu, C.F.J. (1991). Approach to the construction of asymmetrical orthogonal arrays. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **86**, 450-456.

Wang. J.C. and Wu, C.F.J. (1992). Nearly orthogonal arrays with mixed levels and small runs. *Technometrics*, **34**, 409–422.

Wang. J.C. and Wu, C.F.J. (1995). A hidden projection property of Plackett-Burman and related designs. *Statist. Sinica*, **5**, 235–250.

Webb, S.R. (1962). Some new incomplete factorial designs, Abstract. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 296.

Webb, S.R. (1968). Non-orthogonal designs of even resolution. *Technometrics*, **10**, 291–299.

Webb, S.R. (1971). Small incomplete factorial experiment design for two- and three level factors. *Technometrics*, **13**, 243–256.

White, D. and Hultquist, R. A. (1965). Construction of confounding plans for mixed factorial designs. *Ann. Math. Statist.*, **36**, 1256–1271.

Whitwell, J.C. and Morbey, G.K. (1961). Reduced designs of resolution five. *Technometrics*, **3**, 459–477.

Wilkie, D. (1962). A method of analysis of mixed level factorial experiments. *Appl. Statist.*, **11**, 184–195.

Williams, E.J. (1952). The interpretation of interactions in factorial experiments. *Biometrika*, **39**, 65–81.

Woodward, J.A. and Bonett, D.G. (1991). Simple main effects in factorial designs. *J. Appl. Statist.*, **18**, 255–264.

Wu, C.F.J. (1989). Construction of 2^m4^n designs via a grouping scheme. *Ann. Statist.*, **17**, 1880–1885.

Wu, C.F.J. (1991). Balanced repeated replications based on mixed orthogonal arrays. *Biometrika*, **78**, 181-188.

Wu, C.F.J. and Chen, Y. (1992), A graph-aided method for planning two-level experiments when certain interactions are important. *Technometrics*, **34**, 162–174.

Wu, H., Mee, R., and Tang, B. (2012). Fractional factorial designs with admissible sets of clear two-factor interactions. *Technometrics*, **54**, 191–197.

Wu, C.F.J. and Zhang, R. (1993). Minimum aberration designs with two-level and four-level factors. *Biometrika*, **80**, 203–209.

Wu, C.F.J., Zhang, R.C., and Wang, R. (1992). Construction of asymmetrical orthogonal arrays of the type $OA\{s^k, s^m(s^{r_1})^{n_1} \ldots (s^{r_t})^{n_t}\}$. *Statist. Sinica*, **2**, 203–219.

Wu, C.F.J. and Zhu, Y. (2003). Optimal selection of single arrays for parameter design experiments. *Statist. Sinica*, **13**, 1179–1199.

Wu, H. and Wu, C.F.J. (2002). Clear two-factor interactions and minimum aberration. *Ann. Statist.*, **30**, 1496–1511.

Xu, H. (2002). An algorithm for constructing orthogonal and nearly-orthogonal arrays with mixed levels and small runs. *Technometrics*, **44**, 356–368.

Xu, H. (2003). Minimum moment aberration for nonregular designs and supersaturated designs. *Statist. Sinica*, **13**, 691–708.

Xu, H. (2005). A catalogue of three-level regular fractional factorial designs. *Metrika*, **62**, 259–281.

Xu, H. (2006). Blocked regular fractional factorial designs with minimum aberration. *Ann. Statist.*, **34**, 2534–2553

Xu, H. (2009). Algorithmic construction of efficient fractional factorial designs with large run sizes. *Technometrics*, **51**, 262–277.

Xu, H. and Wu, C.F.J. (2001). Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs. *Ann. Statist.*, **29**, 1066–1077.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1992). Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 20 and 19 (maximal) constraints. *SUT J. Math.*, **28**, 191–209.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1993). Profiles of 2^m factorial designs. *Statist. Sci. Data Anal.*, 543–557.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1994). Classification of fractional 2^5 and 2^6 factorial designs having 16 and 20 runs derivable from saturated orthogonal arrays of strength two. *SUT J. Math.*, **30**, 35–50.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1994). Saturated two symbol orthogonal arrays of strength two and Hadamard three designs. *SUT J. Math.*, **30**, 51–64.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1995). Classification of orthogonal 24-run 2^5 factorial designs derivable from saturated two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 24 and index 6. *SUT J. Math.*, **31**, 39–53.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1996). New light on fractional 2^m factorial designs. *J. Statist. Plann. Inference*, **56**, 269–287.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Hyodo, Y., and Yumiba, H. (1999). Enumeration and classification of two-symbol orthogonal arrays of strength t and m=t+4 constraints. *J. Jap. Stat. Soc.*, **29**, 135–145.

Yamamoto, S., Fujii, Y., and Mitsuoka, M. (1993). Three-symbol orthogonal arrays of strength 2 and index 2 having maximal constraints: Computational study. *J. Combin. Inf. Syst. Sci.*, **18**, 329–342.

Yamamoto, S., Fujii, Y., Namikawa, T., and Mitsuoka, M. (1991). Three-symbol orthogonal arrays of strength t having t + 2 constraints. *SUT J. Math.*, **27**, 93–111.

Yamamoto, S., Hyodo, Y., Mitsuoka, M., Yumiba, H., and Takahashi, T. (1998). Algorithm for the construction and classification of orthogonal arrays and its feasibility. *J. Combin. Inf. Syst. Sci.*, **23**, 71–83.

Yamamoto, S., Kuriki, S., and Sato, M. (1984). On existence and construction of some 2-symbol orthogonal arrays. *TRU Math.*, Classification of orthogonal 24-run, 317–331.

Yamamoto, S., Namikawa, T., and Fujii, Y. (1988). Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength t, t + 3 constraints and index 4. *TRU Math.*, **24**, 167–184.

Yamamoto, S., Shirakura, T., and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 21 and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* **27**, 143–157.

Yamamoto, S., Yuan, F., and Kuwada, M. (1985). On the maximum number of constraints for s symbol balanced arrays of strength t. *Commun. Statist. Theory Meth*, **14**, 2447-2456.

Yang, C. H. (1968). On designs of maximal (+1, -1) matrices of order $n \equiv 2 \pmod 4$. *Math. Comput.*, **22**, 174–180.

Yates, F. (1936). A new method of arranging variety trials involving a large number of varieties. *J. Agric. Sci.*, **26**, 424–455.

Yates, F. (1936). Incomplete randomized blocks. *Ann. Eugenics*, **8**, 121–140.

Ye, K.Q. (2004). A note on regular fractional factorial designs. *Statist. Sinica*, **14**, 1069–1074.

Youden, W.J. (1961). Partial confounding in fractional replication. *Technometrics*, **3**, 353–358.

Young, J.C. (1997). A catalog of confounding schemes for 8-, 16-, and 32-run fractional factorial designs. *Quality Engineering*, **9**, 433–439.

Yumiba, H., Hyodo, Y., and Yamamoto, S. (1995). Fractional 3^m factorial designs with special reference to 18-run orthogonal 3^4 factorial designs. *SUT J. Math.*, **31**, 113–132.

Yumiba, H., Hyodo, Y., and Yamamoto, S. (1997). Classification of two-symbol orthogonal arrays of size 24, strength 2, 6 constraints and index 6 derivable from saturated orthogonal arrays having 23 constraints. *SUT J. Math.*, **33**, 47–63.

Zelen, M. (1958). The Use of group divisible designs for confounded asymmetric factorial experiments. *Ann. Math. Statist.*, **29**, 22–40.

Zhu, Y. (2003). Structure function for aliasing patterns in 2^{l-n} design with multiple groups of factors. *Ann. Statist.*, **31**, 995–1011.

Ziegel, E. (1985). Applied factorial and fractional designs. *Technometrics*, **27**, 315–316.

Богуславский И.Е. (1989). Построение обобщенных геометрических факторных планов вида $8^n4^m//64$. Заводская лаборатория, **55**, 82–89.

Бродский В.З. (1969). Насыщенные планы в экстремальном экспериментировании. *Теория вероятностей и ее применения*, **14**, 721–723.

Бродский В.З. (1971). *Об ортогональных планах*. М., Изд-во МГУ.

Бродский В.З. (1972). *Многофакторные регулярные планы*. Изд-во МГУ.

Бродский В.З. (1978). Об оптимальности факторных планов. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 64–68.

Бродский В.З. (1975). Факторные эксперименты: модели, планы, оптимальность. В сб. *«Планирование оптимальных экспериментов»* (М.Б.Малютов – ред.), изд-во МГУ, 51–105.

Бродский В.З. (1976). *Введение в факторное планирование эксперимента*. М., «Наука».

Бродский В.З. (1981). О планах Аддельмана-Кемпзорна и о планах 4^n x 8^m//64. *Вопросы кибернетики. Линейная и нелинейная параметризация в* *задачах планирования эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 52–58.

Бродский В.З., Бродский Л.И., Голикова Т.И., Никитина Е.П., Панченко Л.А. (1982). *Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей*. М., Металлургия.

Бродский В.З., Бродский Л.И., Малолеткин Г.Н., Мельников Н.Н. (1978). О каталоге факторных планов эксперимента на ЭВМ. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 6–24.

Бродский В.З., Бродский Л.И., Малолеткин Г.Н., Мельников Н.Н. (1981). Программный комплекс по планированию эксперимента [версия 2.0 и перспективы развития]. *Вопросы кибернетики. Нетрадиционные подходы к планированию эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 138–158.

Бродский В.З., Бродский Л.И., Смирягина Т.Г. (1978). Об одном способе *G*-обращения в факторных экспериментах. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 24–30.

Бродский В.З., Голикова Т.И. (1971). *D-оптимальные планы для частного случая линейной регрессии*. М., Изд-во МГУ.

Бродский В.З., Голикова Т.И. (1972). Построение D-оптимальных планов взвешивания с минимальным числом наблюдений. *Теория вероятностей и ее применения*, **17**, 578–582.

Бродский В.З., Голикова Т.И. (1981). О сопоставимости критериев оптимальности планирования. *Вопросы кибернетики. Нетрадиционные подходы к планированию эксперимента, Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*, 158–160.

Бродский В.З., Закускин С.В. (1986). Проблемы планирования эксперимента в системах аналитического контроля. Заводская лаборатория, **52.**

Бродский В.З., Кузнецов В.С. (1976). Об оптимальных преобразованиях регулярных планов главных эффектов, *Заводская лаборатория*, **42**, 316–320.

Бродский Л.И. (1978). Некоторые теоремы о пучках параллельных плоскостей связанных множеств геометрических планов. *Вопросы кибернетики. Математико-статистические методы анализа и планирования эксперимента. Академия наук СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»*.

Бродский Л.И., Бродский В.З. (1977). Свойства геометрических планов $2^к$. В сб. *«Регрессионные эксперименты (планирование и анализ)»* (В.В.Налимов – ред.), изд-во МГУ, 85–102.

Горский В.Г., Адлер Ю.П., Бродский В.З., Кузнецов В.С. (1973). Линейные планы с целочисленными уровнями. *Заводская лаборатория*, **39**, 579–583.

Горский В.Г., Бродский В.З. (1968). Некоторые вопросы применения симплекс-планов. *Заводская лаборатория*, **34**, 838–842.

Горский В.Г., Бродский В.З. (1969). О симплекс-планах первого порядка и связанных с ними планах второго порядка. В книге *«Новые идеи в планировании эксперимента»*, М. «Наука», 59–117.

Горский В.Г., Бродский В.З. (1969). Нерегулярные реплики факторного эксперимента 2^n. В книге *«Новые идеи в планировании эксперимента»*, М. «Наука», 118–139.

Горский В.Г., Бродский В.З. (1969). О насыщенных ортогональных планах первого порядка на кубе. В книге *«Проблемы планирования эксперимента»*, М., «Наука», 88–96.

Горский В.Г., Бродский В.З., Липкинд, Б.Я., Сборщиков Г.С. (1978). Новый метод планирования экспериментов при определении параметров безразмерных комплексов. *Заводская лаборатория*, **44**, 1237–1240.

Кочаров Р.Г., Бродский В.З., Горский В.Г. (1969). Определение показателей степеней в уравнениях с помощью методов планирования эксперимента. *Теоретические основы химической технологии*, **3**, 281–287.

Ермаков С.М., Бродский В.З., Жиглявский А.А., Козлов В.П., Малютов М.Б., Мелас В.Б., Седунов Е.В., Федоров В.В. (1983). *Математическая теория планирования эксперимента*, М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы.

Маркова Е. В. (1970). *Неполноблочные планы*. Изд-во МГУ, 1970.

Маркова Е.В., Лисенков А.Н. (1973). *Планирование эксперимента в условиях неоднородностей*. М., «Наука».

Налимов В.В., Чернова Н.А. (1965). *Статистические методы планирования экстремальных экспериментов*. М., «Наука».

Федоров В.В. (1971). *Теория оптимального эксперимента*. М., *«Наука»*.

Широкова С.А. (1968). Блок-схемы. *Усп. мат. наук*, **23,** 51–98.

Предметный указатель